

1908.

Nr. 4.

ANNALEN DER PHYSIK.

SEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. v. E. WIRDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

BAND 25. HEFT 4.

DER GÄVERN REIHE 330, BANDES 4 HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEgeben VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1908.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

DÖRRIENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 15 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 45 M.

(Ausgegeben am 31. März 1908.)

Inhalt.

	Seite
1. Max Wien. Über die Dämpfung von Kondensatorschwingungen. I. Rückwirkung eines resonierenden Systems. II. Erzeugung wenig gedämpfter Schwingungen	625
2. W. Ritz. Magnetische Atomfelder und Serienspektren	660
3. L. Hermann. Zur Theorie der Kombinationstöne	697
4. B. Walter und R. Pohl. Zur Frage der Beugung der Röntgenstrahlen. (Hierzu Taf. V, Figg. 1 n. 2.)	715
5. Hans Georg Möller. Zur Theorie der Überspannung bei elektrolytischer Gasabscheidung	725
6. Max Toepler. Gleitbüschel auf Flüssigkeitsoberflächen	745
7. Edgar Meyer und Erich Regener. Über Schwankungen der radioaktiven Strahlung und eine Methode zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums	757
8. Günther Schulze. Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs und eine Klassifizierung des Verhaltens elektrolytischer Anoden. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)	775
9. Erich Mayer. Ein neues Universalvariometer für Lokalvariationen, Intensitäts- und Deklinationsschwankungen	788
10. Theodor Lohnstein. Zur Theorie des Adhäsionsplattenversuches	807
11. P. Debye. Eine Bemerkung zu der Arbeit von Hrn. F. A. Schulze: „Einige neue Methoden zur Bestimmung der Schwingungszahlen höchster hörbarer und unhörbarer Töne usw.“	819
12. G. A. Schott. Berichtigung zur Arbeit: „Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der Bewegung von Elektronen“	824

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Geh. Hofrat Prof. Dr. W. Wien, Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Junger promovierter Physiker

für unsere Abteilung Apparatebau mit Aussicht auf Lebensstellung zum sofortigen Eintritt gesucht. Anfangsgehalt M. 3600.

Neufeldt & Kuhnke,
Elektrotechnische Fabrik, Kiel.





ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 25.

1. Über die Dämpfung von Kondensatorschwingungen. I. Rückwirkung eines resonierenden Systems. II. Erzeugung wenig gedämpfter Schwingungen;
von Max Wien.

Bezeichnungen von Abschnitt I und II.

α Galvanometerausschlag. α_{100} auf den Maximalausschlag 100 umgerechneter Ausschlag.

$C_1 C_2 C_3$ Kapazitäten der verschiedenen Systeme.

γ Zusatzdekrement im Meßkreis.

$\delta_{01} \delta_{02} \delta_{03}$ Dämpfungen in den ungekoppelten Systemen.

$\delta_1 \delta_2 \delta_3$ Dämpfungen der gekoppelten Schwingungen.

$d_{01} d_{02} d_{03}$ Dekemente der ungekoppelten Systeme.

$d_1 d_2 d_3$ Dekemente der gekoppelten Schwingungen.

F Funkenpotential. F , Funkenstrecke in em.

J_{eff}^2 Stromeffekt im Meßkreis. J_{ref}^2 Stromeffekt bei Resonanz.

$k k_{12} k_{23}$ Koppelungskoeffizienten.

$L_{11} L_{22} L_{33}$ Selbstinduktionskoeffizienten.

$L_{12} L_{23}$ Gegenseitige Induktionskoeffizienten.

$\nu_{01} \nu_{02} \nu_{03}$ Schwingungszahlen der ungekoppelten Systeme in 2π Sek.

$\nu_1 \nu_2 \nu_3$ Schwingungszahlen der gekoppelten Schwingungen in 2π Sek.

$$p_{12} = 2 \frac{L_{12}}{L_{11}} \cdot \frac{C_2}{C_1}, \quad p_{21} = \frac{1}{2} \frac{L_{21}}{L_{22}} \cdot \frac{C_1}{C_2}.$$

τ Schwingungsdauer in der Sekunde.

V_1 Potentialdifferenz im Primärsystem
 V_2 Potential im sekundären System } vgl. Drude p. 519.

x Verstimmung $= 1 - \nu_{03}/\nu_{01}$.

$$y = \frac{100 \cdot J_{\text{eff}}^2}{J_{\text{ref}}^2}.$$

§ 1. Bei der wachsenden Bedeutung der Dämpfung elektrischer Schwingungen erscheint eine bessere Ausbildung ihrer Messung wünschenswert. Die wichtigste Meßmethode ist die von Bjerknes¹⁾, bei der mit Hilfe eines resonierenden Meß-

1) V. Bjerknes, Wien. Ann. 55. p. 120. 1985.

kreises die „Resonanzkurve“ aufgenommen, und aus ihr die Dämpfung berechnet wird. Die Mängel dieser Methode beruhen einmal darauf, daß eine der größten Fehlerquellen: die Rückwirkung des resonierenden Meßkreises weder theoretisch noch experimentell genügend untersucht ist, ferner darauf, daß die dämpfende Wirkung des Funkens nicht den Voraussetzungen der Bjerknesschen Theorie entspricht, und schließlich darauf, daß die verschiedenen Dämpfungsursachen: Funke, Joulesche Wärme, Strahlung usw. alle gleichzeitig gemessen werden und schwer voneinander zu trennen sind.

Schon seit längerer Zeit bin ich bemüht, diese Mängel zu beseitigen; über die bisherigen Ergebnisse soll jetzt berichtet werden. In den folgenden beiden ersten Abschnitten der Arbeit handelt es sich zunächst um die Rückwirkung eines resonierenden Systems und um die Erzeugung schwach gedämpfter Schwingungen unter Elimination des Funkens.

I. Rückwirkung eines resonierenden Systems.¹⁾

A. Theorie der Rückwirkung.

§ 2. Die Theorie der Schwingungen zweier gekoppelter elektrischer Systeme ist am ausführlichsten von Drude²⁾ behandelt.

Drude hat die Theorie für *enge* Koppelung ganz durchgeführt, ebenso für *unendlich lose* Koppelung, also für ein resonierendes System ohne merkliche Rückwirkung. Weder von Drude noch von Bjerknes sind jedoch die Gleichungen für *lose, aber nicht unendlich lose* Koppelung abgeleitet, so daß man die Fehler, welche von einer eben beginnenden Rückwirkung herrühren, nicht danach beurteilen kann.

Die Drudesche Theorie läßt sich aber leicht auf den Fall loser Koppelung ausdehnen.

Ich unterscheide im folgenden zwischen den für die ungekoppelten Systeme geltenden Werten der Schwingungsdauer

1) Über einen Teil der Ergebnisse dieses Abschnittes wurde schon auf der Naturforscherversammlung in Dresden berichtet. Vgl. Verh. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. 5. p. 478. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 764. 1907.

2) P. Drude, Ann. d. Phys. 13. p. 512. 1904. Auf die Gleichungen dieser Arbeit ist im folgenden mehrfach verwiesen in der Weise, daß zu der Nummer der Gleichung „D“ hinzugefügt ist, z. B. (28 D).

und Dämpfung $\nu_{01} \nu_{02}$, $\delta_{01} \delta_{02}$ und denen, welche für die gekoppelten Systeme gelten: $\nu_1 \nu_2$, $\delta_1 \delta_2$, wobei zu bemerken ist, daß, da die Koppelung als lose vorausgesetzt ist, ν_1 nur wenig von ν_{01} usw. verschieden ist.

Aus den simultanen Differentialgleichungen¹⁾ (ID)

$$\frac{d^2 V_1}{dt^2} + 2 \delta_{01} \frac{d V_1}{dt} + (\nu_{01}^2 + \delta_{01}^2) V_1 = p_{12} \frac{d^2 V_2}{dt^2},$$

$$\frac{d^2 V_2}{dt^2} + 2 \delta_{02} \frac{d V_2}{dt} + (\nu_{02}^2 + \delta_{02}^2) V_2 = p_{21} \frac{d^2 V_1}{dt^2}.$$

leitet Drude die determinierende Gleichung (28 D) ab:

$$(I) \quad z^4 + 2\delta_{01}z + \nu_{01}^2 + \delta_{01}^2)(z^4 + 2\delta_{02}z + \nu_{02}^2 + \delta_{02}^2) = p_{12}p_{21}z^4.$$

Diese Gleichung vierten Grades wäre eigentlich zu behandeln, Drude jedoch vernachlässigt die Rückwirkung und damit das Glied $p_{12}p_{21}z^4$; dadurch erhält er einfach die vier Wurzeln der Gleichung:

$$z_1 = -\delta_{01} + i\nu_{01}, \quad z_2 = -\delta_{01} - i\nu_{01}, \quad z_3 = -\delta_{02} + i\nu_{02}, \\ z_4 = -\delta_{02} - i\nu_{02},$$

also Schwingungsdauern und Dämpfungen der ungekoppelten Systeme; während wir mit Beibehaltung des Gliedes $p_{21}p_{12}z^4$ als Lösung der Gleichung erhalten

$$z_1 = -\delta_1 + i\nu_1, \quad z_2 = -\delta_1 - i\nu_1, \quad z_3 = -\delta_2 + i\nu_2, \\ z_4 = -\delta_2 - i\nu_2,$$

also die Schwingungszahlen und Dämpfungen der gekoppelten Systeme.

§ 3. Die formale Lösung ist durchaus analog der Drudeschen. Wir erhalten für das Potential im Resonanzsystem:

$$V_2 = 2B \sin \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} t + \chi \right) \quad (51 D),$$

worin B sich von dem Drudeschen Wert nur durch den Faktor ν_1^2/ν_{02}^2 unterscheidet, also (55 D)

$$B = \frac{p_{21} F \cdot \nu_1^2 \nu_2^2}{2(\nu_1 + \nu_2) \nu_{02}^2} \sqrt{\frac{e^{-2\delta_1 t} + e^{-2\delta_2 t} - 2e^{-(\delta_1 + \delta_2)t} \cos \varphi}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 - \delta_2)^2}},$$

wobei (56 D)

$$\varphi = (\nu_1 - \nu_2)t + \frac{\delta_1 \nu_2 + \delta_2 \nu_1}{\nu_1 + \nu_2} \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right).$$

1) Die Bezeichnungen sind am Anfang der Arbeit zusammengestellt.

Der für uns vor allem wichtige Stromeffekt ergibt sich hiernach (84 D) zu:

$$(II) \quad J_{2\text{eff.}}^2 = p_{21}^2 \cdot F^2 \cdot \frac{\nu_1^4 \nu_2^4}{4 \nu_{02}^4} C_2^2 \frac{\delta_1 + \delta_2}{\delta_1 \delta_2} \frac{1}{(\nu_1 - \nu_2)^2 + (\delta_1 + \delta_2)^2}.$$

In diese Formeln sind nun die Wurzeln der Gleichung vierten Grades für z (I) einzusetzen. Diese Wurzeln habe ich bereits in einer älteren Arbeit¹⁾ abgeleitet und in eine bequeme Näherungsform gebracht, die hier bei loser Koppelung völlig streng genug ist. Danach ist zu unterscheiden, ob die Dämpfung oder die Koppelung (k) vorherrschend ist, d. h. ob

$$|\delta_{01} - \delta_{02}| > k \cdot v \quad \text{oder} \quad |\delta_{01} - \delta_{02}| < k \cdot v.$$

Der erste Fall ist bei loser Koppelung der viel häufigere.

§ 4. $|\delta_{01} - \delta_{02}| > k \cdot v$ *Dämpfung vorherrschend.* Die Lösung der Gleichung (I) gibt:

$$\nu_1 = \nu_{01} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\nu_{01} - \nu_{02})}{4 \{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}}, \quad \nu_2 = \nu_{02} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\nu_{01} - \nu_{02})}{4 \{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}},$$

$$\delta_1 = \delta_{01} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})}{4 \{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}}, \quad \delta_2 = \delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})}{4 \{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2\}}.$$

Für den Fall der Resonanz $\nu_{01} = \nu_{02}$ ist:

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu_{01} = \nu_{02}, \quad \delta_1 = \delta_{01} - \frac{k^2 \nu_{01}^2}{4 (\delta_{01} - \delta_{02})}, \quad \delta_2 = \delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2}{4 (\delta_{01} - \delta_{02})}.$$

Im Falle der Resonanz hat B genau die gleiche Form wie bei Drude (58 D)

$$B = \frac{p_{21} F \cdot \nu_1}{3} \cdot \frac{e^{-\delta_1 t} - e^{-\delta_2 t}}{\delta_1 - \delta_2}$$

und die Maximalamplitude (60 D) wird

$$B_{\max.} = - \frac{p_{21} F \cdot \nu_1}{4 \delta_2} \cdot \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} \right)^{\frac{\delta_1}{\delta_2 - \delta_1}},$$

worin für δ_1 und δ_2 die obigen Resonanzwerte einzusetzen sind.

Unsere Gleichung für den Stromeffekt (II) wird nach Einsetzung der allgemeinen Werte etwas umständlich:

1) M. Wien, Wied. Ann. 61. p. 151. 1897.

$$J_2^2 \text{ eff.} = \frac{p_{21}^2 F^4 \cdot C_2^2}{4 \nu_{02}^4} \left[\nu_{01} \nu_{02} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\nu_{01} - \nu_{02})^2}{4[(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2]} - \frac{k^4 \cdot \nu_{01}^4 (\nu_{01} - \nu_{02})^2}{16[(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2]^2} \right] \\ \left[\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\left\{ \left(\delta_{01} - \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})}{4[(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2]} \right) \left(\delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})}{4[(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2]} \right) \right\}} \right] \\ \left[\left\{ (\nu_{01} - \nu_{02})^2 \left(1 + \frac{k^2 \nu_{01}^2}{2[(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2]} \right)^2 + (\delta_{01} + \delta_{02})^2 \right\} \right]$$

Indem wir jetzt lose Koppelung voraussetzen, so daß k^2 neben 1 vernachlässigt werden darf, wird:

$$J_2^2 \text{ eff.} = \frac{p_{21}^2 F^4 C_2^2 \nu_{01}^4}{4} \left[\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\delta_{01} \delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})^2}{4[(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2]}} \right] \\ \left[\left\{ (\nu_{01} - \nu_{02})^2 \left(1 + \frac{k^2 \nu_{01}^2}{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2} \right)^2 + (\delta_{01} + \delta_{02})^2 \right\} \right]$$

Führt man hierin die Dekremente

$$\delta_{01} = \frac{2\pi \delta_{01}}{\nu_{01}}, \quad \delta_{02} = \frac{2\pi \delta_{02}}{\nu_{01}},$$

ferner die Verstimmung

$$x = 1 - \frac{\nu_{02}}{\nu_{01}}$$

und für p_{21} seinen Wert

$$\frac{1}{2} \frac{L_{21} C_1}{L_{22} C_2} \text{ (23 D.)}$$

ein und setzt

$$k^2 = \frac{L_{21}^2}{L_{11} L_{22}},$$

so wird schließlich:

$$(III) \left\{ J_2^2 \text{ eff.} = \frac{F^4 C_1}{2} \frac{k^2 \pi^3}{\nu_{01} L_{22}} \right. \\ \left[\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\left\{ \delta_{01} \delta_{02} + \frac{\pi^2 k^2 (\delta_{01} - \delta_{02})^2}{4 \pi^2 x^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2} \right\}} \right] \\ \left[\left\{ 4 \pi^2 x^2 \left(1 + \frac{4 \pi^2 k^2}{4 \pi^2 x^2 + (\delta_{01} - \delta_{02})^2} \right)^2 + (\delta_{01} + \delta_{02})^2 \right\} \right]$$

Von der Bjerknesschen Formel für verschwindende Koppelung

$$J_2^2 \text{ eff.} = \frac{F^4 C_1}{2} \frac{k^2 \pi^3}{\nu_{01} L_{22}} \left[\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\delta_{01} \delta_{02} [4 \pi^2 x^2 + (\delta_{01} + \delta_{02})^2]} \right]$$

unterscheidet sich unsere Formel durch das Hinzutreten zweier Korrektionsglieder A und B :

$$J_2^{\text{eff.}} = \frac{F^2 \cdot C_1}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{v_{01} L_{22}} \left[\frac{b_{01} + b_{02}}{\{b_{01} b_{02} + A\} \{4 \pi^2 x^2 (1 + B) + (b_{01} + b_{02})^2\}} \right],$$

worin

$$A = \frac{\pi^2 k^2 (b_{01} - b_{02})^2}{4 \pi^2 x^2 + (b_{01} - b_{02})^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{4 \pi^2 k^2}{4 \pi^2 x^2 + (b_{01} - b_{02})^2} \quad \text{ist.}$$

§ 5. Der Einfluß von A und B besteht einmal darin, daß die ganze Resonanzkurve abgeflacht wird, so daß die aus ihr berechneten Dekremente zu groß ausfallen, außerdem jedoch wird die Kurve deformiert, d. h. die einzelnen Teile der Kurve geben verschiedene Werte für die Dekremente. Das Ganze kann am besten durch Beispiele erläutert werden. In der Tab. 1 (Fig. 1)

Tabelle 1, Fig. 1.

$$b_{01} = 0,10, \quad b_{02} = 0,02.$$

x	$k = 0$	$k = 0,01$			
		3 (A)	4 (A u. B)	5 (A)	6 (A u. B)
1	2				
0 %	100	67	67	100	100
0,5	98,5	65,3	63,2	97,5	94,3
1,0	78,7	60,1	55,8	89,7	82,9
1,5	61,8	51,2	46,7	76,8	69,6
2,0	47,7	41,7	38,2	62,2	56,9
2,5	36,8	33,5	31,0	49,9	46,3

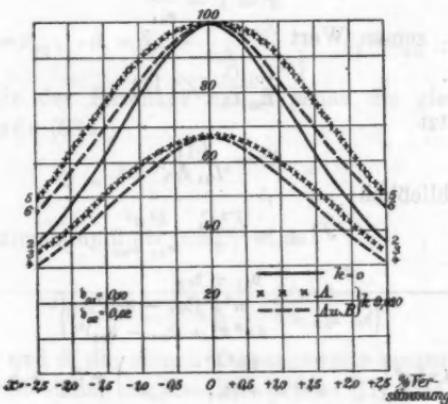


Fig. 1. Berechnung der Rückwirkung.

sind für den Fall $b_{01} = 0,10$, $b_{02} = 0,02$ die Resonanzkurven berechnet. Die Reihe 1 der Tabelle enthält die Verstimmung x in

Prozenten, die 2. Reihe den Stromeffekt $J\beta_{\text{eff}}$ für verschwindende Koppelung $k = 0$. Die entsprechende Resonanzkurve ist in der Figur ausgezogen und ebenfalls mit „2“ bezeichnet. Die übrigen Reihen und Kurven beziehen sich auf eine Koppelung $k = 0,01$. Zunächst zeigen die Reihen 3 und 4 und die entsprechenden Kurven 3 * * * und 4 — — —, die Einwirkung der Korrektion A allein und die der Korrekturen A und B zusammen auf den Stromeffekt. Die Kurven verlaufen wesentlich flacher als die für $k = 0$. Da es nun bei der Bestimmung von $b_{01} + b_{02}$ aus der Resonanzkurve nicht auf die absoluten, sondern auf die relativen Werte des Stromeffektes ankommt, sind schließlich in den beiden letzten Reihen 5 und 6 die Werte der Stromeffekte für einen Maximalwert 100 umgerechnet. Die entsprechenden Kurven 5 und 6 gestatten nun einen direkten Vergleich mit der Resonanzkurve für $k = 0$ und geben ein Bild der Änderung der Kurve durch die Koppelung.

Wir sehen deutlich, daß durch das Zusatzglied A die Resonanzkurve abgeflacht wird, durch das Glied B hingegen die Wirkung zum Teil wieder aufgehoben wird: B verursacht ein Steilerwerden der Resonanzkurve besonders in der Mitte. A bewirkt mithin eine Vergrößerung, B eine Verkleinerung der aus der Kurve berechneten Werte von $b_{01} + b_{02}$. Der Einfluß von A ist jedoch im ganzen stets größer als der von B . *Es wird also durch zu enge Koppelung die Kurve zu flach verlaufen; $b_{01} + b_{02}$ zu groß ausfallen.*

§ 6. Um nun schließlich zu zeigen, wie sich die Resonanzkurve mit dem Koppelungsgrad ändert, sind in der Tab. 2 die Zahlen für $k = 0$, $k = 0,005$ und $k = 0,010$ zusammengestellt. Unter Δ ist die prozentuale Änderung des Stromeffektes gegen den Wert für $k = 0$ daneben angegeben.

Tabelle 2.

 $b_{01} = 0,1, b_{02} = 0,02$.

x	$k = 0$	$k = 0,005$	Δ	$k = 0,010$	Δ
0	100	100	0 %	100	0 %
0,5	93,5	94,1	0,6	94,3	0,7
1,0	78,7	80,4	2,1	82,9	5,4
1,5	61,8	64,5	4,3	69,6	12,5
2,0	47,7	50,4	5,5	56,9	19,2
2,5	36,8	39,6	7,6	46,3	24

In Tab. 3, Fig. 2 ist noch ein zweites Beispiel gegeben, worin $b_{01} = 0,20$, $b_{02} = 0,01$ ist, also die Korrektion B mehr hinter A zurücksteht.

Tabelle 3, Fig. 2.

 $b_{01} = 0,20$, $b_{02} = 0,01$.

x	$k = 0$	$k = 0,005$	$k = 0,010$	$k = 0,020$
0	100	100	100	100
1	91,9	92,7	94,1	95,1
2	73,8	75,7	80,2	85,3
3	55,4	58,2	64,6	75,2
4	41,4	43,9	50,8	64,8
5	—	—	—	56,7
6	—	—	—	47,9

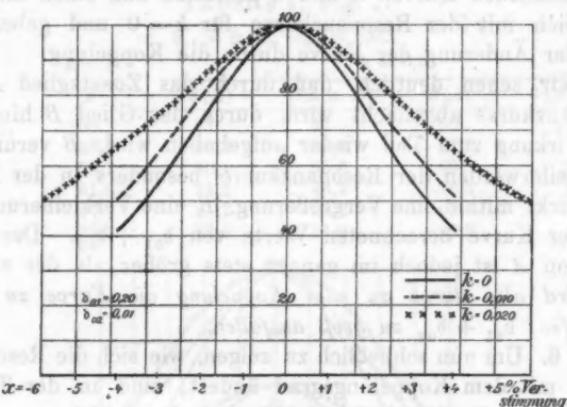


Fig. 2. Berechnung der Rückwirkung.

Die Verflachung der Resonanzkurven mit wachsender Koppelung tritt in den Kurven deutlich hervor. Aus den Kurven bestimmt sich:¹⁾

$k =$	0	0,005	0,010	0,020
$b_{01} + b_{02} =$	0,210	0,222	0,254	0,328

Der letzte Wert ist also schon um 50 Proz. zu groß.

1) Über die Berechnung vgl. J. Zenneck, Elektromagn. Schwingungen usw. Stuttgart 1900. p. 1008.

Bei wachsender Koppelung oder wenn die Differenz der Dekremente $|\delta_{01} - \delta_{02}|$ kleiner wird, tritt die Korrektion B mehr in den Vordergrund. Dies bewirkt, daß die Kurve etwas deformiert wird und zwar wird ihr Gipfel verhältnismäßig zu steil; bei einigen der oben angeführten Beispiele ist das auch schon merklich. Sehr groß kann aber diese Einwirkung nicht werden, denn für großes k oder sehr kleines $|\delta_{01} - \delta_{02}|$, wo unsere Formel eine größere Deformation ergeben würde, ist die Anwendung dieser Formel nicht mehr statthaft, weil eine Voraussetzung ihrer Berechnung nicht mehr gültig ist. Diese Voraussetzung war, daß $\nu k < |\delta_{01} - \delta_{02}|$ oder $2\pi k < |\delta_{01} - \delta_{02}|$. Für gewöhnlich ist in den praktischen Fällen diese Voraussetzung ja erfüllt, da die Koppelung bei der Aufnahme der Resonanzkurve als lose vorausgesetzt wird, und meist der Oszillator wesentlich stärker gedämpft ist wie der Resonator. Unter Umständen ist jedoch die Dämpfung in beiden Systemen annähernd gleich, und dann kann trotz loser Koppelung $\nu k > |\delta_{01} - \delta_{02}|$ sein. Dieser Fall bedarf daher einer besonderen Betrachtung.

§ 7. $\nu k < |\delta_{01} - \delta_{02}|$. *Koppelung vorherrschend.* In unsere Gleichung (II) p. 628 haben wir jetzt diejenigen Werte von $\delta_1 \delta_2$, $\nu_1 \nu_2$ einzusetzen, welche bei gekoppelten Systemen mit vorherrschender Koppelung gelten. Diese sind:¹⁾

$$\left. \begin{array}{l} \nu_1 \\ \nu_2 \end{array} \right\} = \frac{\nu_{01} + \nu_{02}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2 \nu_{01}^2} - \frac{\nu_{01}^2 k^2 (\delta_{01} - \delta_{02})^2}{(\nu_{01} - \nu_{02}) + \nu_{01}^2 k^2},$$

$$\left. \begin{array}{l} \delta_1 \\ \delta_2 \end{array} \right\} = \frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{2} \pm \frac{(\nu_{01} - \nu_{02})(\delta_{01} - \delta_{02})}{2 \sqrt{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + \nu_{01}^2 k^2}}.$$

Wir erhalten für den Stromeffekt, indem wir wieder k^2 gegen 1 vernachlässigen:

$$J_{\text{eff.}}^2 = \frac{p_{01}^2 F^2 \cdot C_0^2 \nu_{01}^4}{4}$$

$$\left[\frac{\delta_{01} + \delta_{02}}{\delta_{01} \delta_{02} + \frac{k^2 \nu_{01}^2 (\delta_{01} - \delta_{02})^2}{4 \{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2 \nu_{01}^2\}}} \right],$$

$$\left[\left\{ (\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2 \nu_{01}^2 - \frac{(\delta_{01} - \delta_{02})^2 k^2 \nu_{01}^2}{(\nu_{01} - \nu_{02})^2 + k^2 \nu_{01}^2} + (\delta_{01} + \delta_{02})^2 \right\} \right]$$

1) M. Wien, l. c. p. 174.

oder unter Einführung der Dekrete b_{01} , b_{02} und der Verstimmung x

$$(IV) \quad J_2^3 \text{ eff.} = \frac{F^2 \cdot C_1}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{\nu_{01} L_{22}} \cdot \left[\begin{array}{l} b_{01} + b_{02} \\ \left\{ b_{01} b_{02} + \frac{k^2 (b_{01} - b_{02})^2}{4(x^2 + k^2)} \right\} \\ \left\{ 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 k^2 - \frac{k^2 (b_{01} - b_{02})^2}{x^2 + k^2} + (b_{01} + b_{02})^2 \right\} \end{array} \right].$$

Ist $b_{01} = b_{02}$ oder $b_{01} - b_{02}$ so klein, daß die Glieder mit $(b_{01} - b_{02})^2$ vernachlässigt werden können, so ist:

$$J_2^3 \text{ eff.} = \frac{F^2 \cdot C_1}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{\nu_{01} L_{22}} \left[\frac{b_{01} + b_{02}}{b_{01} b_{02} \{ 4\pi^2 x^2 + 4\pi^2 k^2 + (b_{01} + b_{02})^2 \}} \right],$$

d. h. es tritt infolge der Koppelung in der gewöhnlichen Bjerknesschen Resonanzgleichung zu dem Glied $(b_{01} + b_{02})^2$ das Glied $4\pi^2 k^2$ hinzu: die Resonanzkurve ergibt uns also bei der Berechnung an Stelle von $b_{01} + b_{02}$ den zu großen Wert

$$\sqrt{(b_{01} + b_{02})^2 + 4\pi^2 k^2}.$$

Bei größeren Werten von $b_{01} - b_{02}$ sind die Glieder mit $(b_{01} - b_{02})^2$ nicht mehr ohne weiteres zu vernachlässigen, jedoch ist zu berücksichtigen, daß die beiden Glieder mit $(b_{01} - b_{02})^2$ entgegengesetztes Vorzeichen haben, also gegeneinander wirken; sie werden daher nur einen geringen Einfluß ausüben und das Korrektionsglied $4\pi^2 k^2$ vorherrschend sein, solange $|b_{01} - b_{02}|$ kleiner ist als $2\pi k$, und das ist ja bei unserer Berechnung hier vorausgesetzt.

Wir erhalten also als Resultat, daß, wenn die Differenz der Dämpfungen so klein ist, daß die Koppelung vorherrscht — $2\pi k > |b_{01} - b_{02}|$ — ebenfalls eine Verflachung der Resonanzkurven eintritt und man statt $b_{01} + b_{02}$ aus der Kurve

$$\sqrt{(b_{01} + b_{02})^2 + 4\pi^2 k^2}$$

erhält; eine merkliche Deformation der Resonanzkurve tritt jedoch nicht ein. Eine Erläuterung der Wirkung durch Kurven ist daher hier nicht notwendig.

§ 8. Bestimmung von b_{02} . Aus der Resonanzkurve erhält man nur die Summe der Dekrete $b_{01} + b_{02}$, um b_{01} selbst zu erhalten, muß b_{02} für sich gemessen werden. Das geschieht

durch Vermehrung des Dekrementes b_{02} , um einen bekannten Betrag γ , indem ein Zusatzwiderstand eingeschaltet wird, und Vergleich der beiden Stromeffekte mit und ohne γ bei Resonanz ($x = 0$).

Für $x = 0$ ergeben beide betrachteten Fälle

$$2\pi k > |b_{01} - b_{02}| \quad \text{und} \quad 2\pi k < |b_{01} - b_{02}|$$

den gleichen Ausdruck für den Stromeffekt: $J_r^2 \text{eff.}$

$$J_r^2 \text{eff.} = \frac{F^2 C_1}{2} \cdot k^2 \cdot \pi^3 \frac{v_{01}}{L_{11}} \cdot \left[\frac{1}{(b_{01} b_{02} + \pi^2 k^2) (b_{01} + b_{02})} \right],$$

mithin können wir beide Fälle zugleich betrachten. Ist $J_r' \text{eff.}$ der Stromeffekt nach Vermehrung von b_{02} um γ , so erhalten wir für das Verhältnis der Galvanometerausschläge α_y/α :

$$\frac{\alpha_y}{\alpha} = \frac{J_r'^2 \text{eff.}}{J_r^2 \text{eff.}} = \frac{(b_{01} b_{02} + \pi^2 k^2) (b_{01} + b_{02})}{[b_{01} (b_{02} + \gamma) + \pi^2 k^2] [b_{01} + b_{02} + \gamma]}.$$

Hieraus, indem wir $b_{01} + b_{02} = b_0$ setzen:

$$b_{02} + \frac{\pi^2 k^2}{b_{01}} = \gamma \cdot \frac{\alpha_y/\alpha (b_0 + \gamma)}{b_0 + \alpha_y/\alpha (b_0 + \gamma)} = \gamma \frac{1 + \gamma/b_0}{\alpha/\alpha_y - (1 + \gamma/b_0)}.$$

Statt b_{02} messen wir $b_{02} + \pi^2 k^2/b_{01}$, erhalten also ebenfalls ein zu großes Dekrement. Dies ist auch insofern von Bedeutung, als vielfach diese Methode zur Messung kleiner Dekrete mente geschlossener Schwingungskreise dient.

§ 9. Die theoretische Betrachtung der Rückwirkung des resonierenden Systems bei Dämpfungsmessungen ergibt folgendes Resultat: Infolge der Rückwirkung treten in der Bjerknes-schen Gleichung Glieder hinzu, die dem Quadrat des Koppelungs-koeffizienten k proportional sind. Diese Glieder bewirken eine Verflachung der Resonanzkurve und verursachen Fehler bei der Bestimmung des Dekrementes, das zu groß ausfällt. Um diese Fehler zu vermeiden, muß man k^2 nicht nur, wie Bjerknes und Drude angeben, klein gegen 1 machen, sondern klein gegen $b_{01} b_{02}/\pi^2$. In den gewöhnlichen Fällen ($b_{01} = 0,1$, $b_{02} = 0,01$) muß also k^2 klein gegen 10^{-4} , in extremen Fällen sehr geringer Dämpfung ($b_{01} = 0,01$, $b_{02} = 0,005$) klein gegen $5 \cdot 10^{-6}$ sein.

B. Versuche über die Rückwirkung des Resonanzkreises.

§ 10. Die Versuche wurden zunächst in der Weise ange stellt, daß eine durch Funkenentladung erregte Kondensator-

schwingung in verschieden fester Koppelung auf einen Resonanzkreis wirkte. Der Stromeffekt im Resonanzkreis bei Änderung seiner Kapazität wurde in der bekannten Weise bolometrisch gemessen, und diente zur Konstruktion der Resonanzkurve.

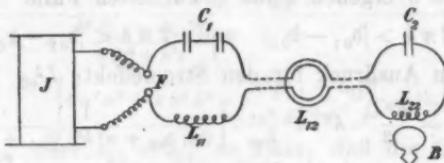


Fig. 3.

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 3 skizziert. Den Strom lieferte ein 80 cm-Induktorium von R. Seiffert & Co. in Hamburg, das durch einen A.E.G.-Turbinenunterbrecher betrieben wurde. Das Induktorium gab sowohl für kleine wie für große Kapazitäten, für kleine und für große Funkenstrecken bei geeigneter Schaltung der Primärspule sehr regelmäßige Funken. Die Kapazität (C_1) des Kreises I bestand in Leydener Flaschen aus Flintglas, zur Vermeidung von Sprühwirkungen in Serie geschaltet. Im Resonanzkreis wurde ein variabler Luftkondensator der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie benutzt. Als Selbstinduktionen dienten sowohl im Oszillatoren wie im Resonator ringförmig gewickelte Spulen aus 3 mm-Cu-Draht.

Für die absolute Messung der Selbstinduktion derartiger dickdrähtiger Spulen mit kleinem Radius besteht die Schwierigkeit, daß bei ihnen wegen des Skineffektes die Selbstinduktion für schnelle Schwingungen wesentlich kleiner ist als für langsame. Deshalb wurde zunächst eine Spule mit großem Radius und wenigen Windungen, bei der diese Wirkung verschwindet, bei langsamen Schwingungen mit einer Selbstinduktionsnormale verglichen und dann durch Vergleich mit dieser Spule bei schnellen Schwingungen die Selbstinduktion der ringförmigen Spulen durch Resonanzversuche bestimmt.

Die Koppelung zwischen Oszillatoren und Resonanzkreis wurde durch zwei koaxiale Drahtkreise bewirkt, deren Abstand verändert werden konnte. Ihr gegenseitiger Induktionskoeffizient L_{12} wurde nach den bekannten Maxwellschen

Formeln berechnet. Daraus ergab sich dann der Koppelungskoeffizient $k = L_{12} / \sqrt{L_{11} L_{22}}$.

§ 11. Es sei zunächst eine Versuchsreihe als Beispiel angeführt.

Tabelle 4.

$$C_1 = 4,8 \cdot 10^{-19}, \quad L_{11} = 25400, \quad b_{01} = 0,11, \quad C_2 = 2,05 \cdot 10^{-19}, \\ L_{22} = 5900, \quad b_{02} = 0,015.$$

x	$k = 0,0044$	$0,0056$	$0,0081$	$0,0105$	$0,014$
-4,8 %	10,5	12	14	15,5	18,5
-3,4	17	19	21	23	26
-2,6	32	33	36	39	41
-1,7	58	62	66	66	68
-0,8	88	89	90	91	91
$\pm 0,0$	100	100	100	100	100
+0,8	88	89	91	94	93
+1,7	62	64	67	70	73
+2,5	34	37	40	43	45
+3,3	20	21	23	26	29
+4,2	18,5	14	16	19	21,5

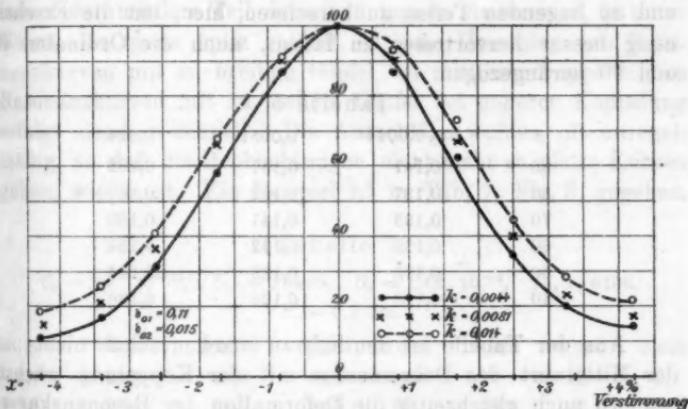


Fig. 4. Beobachtung der Rückwirkung.

In der Fig. 4 sind für die Koppelungen $k = 0,0044$ und $k = 0,014$ die Kurven gezeichnet, und außerdem die Beobachtungen bei $k = 0,0081$ als Kreuze eingetragen.

Die Beobachtung ergibt offenbar qualitativ dasselbe Resultat wie die Theorie: mit steigender Koppelung werden die Resonanzkurven flacher, so daß die daraus berechneten Dekremente zu groß ausfallen.

Quantitativ zeigen sich jedoch erhebliche Differenzen. Zunächst ist die Vergrößerung des Dekrementes besonders für engere Koppelung kleiner als die Theorie es verlangt. Ferner ergab sich bei den Versuchen, daß die Wirkung der Koppelung auch von der Beschaffenheit des Schwingungskreises abhängt; in den meisten Fällen, besonders bei größerer Kapazität ist die Wirkung noch geringer als in den hier angeführten Beispielen.

§ 12. Ferner tritt eine erhebliche *Deformation* der Resonanzkurve hervor, und zwar wird im Gegensatz zur Theorie, nach der bei engerer Koppelung infolge der Korrektion B , p. 633, eher ein etwas zu steiler Gipfel der Resonanzkurve zu erwarten wäre, der Gipfel der Resonanzkurve mit wachsender Koppelung immer breiter.

In der folgenden Tab. 5 sind die aus den verschiedenen Teilen der Resonanzkurven sich ergebenden Werte von $b_{01} + b_{02}$ zusammengestellt und zwar sind, während es sonst zweckmäßig ist, das Dekrement nur aus den zwischen den Ordinaten 50 und 80 liegenden Teilen zu berechnen, hier, um die Erscheinung besser hervortreten zu lassen, auch die Ordinaten 40 und 90 herangezogen.

Tabelle 5.

y	$k = 0,0044$	$0,0081$	$0,014$
90	0,141	0,157	0,182
80	0,137	0,152	0,169
70	0,133	0,147	0,160
60	0,128	0,142	0,154
50	0,128	0,135	0,144
40	0,118	0,126	0,136

Aus der Tabelle ist deutlich zu ersehen, daß nicht nur der Mittelwert des Dekrementes mit der Koppelung wächst, sondern auch gleichzeitig die Deformation der Resonanzkurve; bei der Koppelung 0,0044 beträgt der Unterschied zwischen den Werten von $b_{01} + b_{02}$ für $y = 40$ und $y = 90$ 0,023, bei $k = 0,014$ schon 0,046.

§ 13. Bei der Bestimmung des Dekrementes b_{02} durch Hinzufügung eines bekannten Dekrementes γ im sekundären Kreis sollte sich der Theorie nach (vgl. p. 635) statt b_{02} ergeben $b_{02} + (\pi^2 k^2 / b_{01})$. Die Versuche bestätigten die Theorie insofern, als das Dekrement mit wachsender Koppelung zu-

nahm, jedoch war die Zunahme auch hier, besonders bei enger Koppelung, zu klein. Die Ergebnisse waren wiederum in erheblichen Grade von der Beschaffenheit des Stromkreises abhängig. Folgende Tabelle mag ein Bild von dem Verlaufe geben:

Tabelle 6.

$C_1 = 3 \cdot 10^{-10}$,	$L_{11} = 25500$,	$b_{01} = 0,127$,	$C_2 = 5,1 \cdot 10^{-10}$,			
			$L_{22} = 15000$,	$b_{02} = 0,0125$.		
$k =$	0	0,004	0,006	0,010	0,020	0,024
b_{01} , beob.	—	0,0136	0,0143	0,0154	0,0164	0,0172
b_{01} , ber.	0,0125	0,0137	0,0153	0,0203	0,0435	0,0575

§ 14. Wenn man die Koppelung noch enger macht, als in den bisherigen Versuchen und etwa in die Gegend kommt, wo nach der Theorie zwei Koppelungsschwingungen mit verschiedener Periode auftreten sollten ($2\pi k \leq |b_{01} - b_{02}|$), erhält man eine eigenartliche Deformation der Resonanzkurve, indem der mittlere Teil derselben immer steiler wird, ja unter Umständen ganz spitz zuläuft. Dieser Umschlag von Resonanzkurven mit zu breitem Gipfel bei mittlerer Koppelung zu Resonanzkurven mit zu steilem Gipfel bei engerer Koppelung erfolgt ziemlich schnell. Die Ausschläge werden oft unregelmäßig, so daß die Beobachtungen nicht mehr so glatte Kurven geben, wie sonst. Ein Beispiel ist in Tab. 7, Fig. 5, gegeben.

Tabelle 7.

$C_1 = 3,3 \cdot 10^{-10}$,	$L_{11} = 26500$,	$C_2 = 1,43 \cdot 10^{-8}$,	$L_{22} = 6100$.				
				$F_r = 0,8$ cm.			
x	$k = 0,0045$	0,0073	0,010	0,015	0,020	0,024	0,028
-2,7%	38,2	40,4	44,6	47	47	46	44
-2,0	59,4	61,0	64,0	67	63	58	49
-1,4	75,7	80,0	81	85	82	72	57
-0,8	91,4	98,0	98	94	92	82	60
0	100	100	100	100	100	98	66
+0,4	97,6	96	98	98	96	100	100
1,0	84,0	84	90	93	95	92	68
1,6	66,6	69	74	79	82	74	54
2,2	49,4	50,6	57	58,5	60,6	55	46
2,8	33,0	34,0	38	42	43	42	38
3,6	20,2	20,6	25	27,6	30	32	34

In der Fig. 5 sind die Kurven für $k = 0,0045$, $k = 0,015$ und $k = 0,028$ gezeichnet, wobei die zum Teil etwas verschobenen Maxima übereinandergelegt sind. Diese sehr charakteristische Einschnürung der Gipfels der Resonanzkurve bei engerer Koppelung findet sich stets wieder, wenn ein durch Funkenstrecke erregter Schwingungskreis auf einen Resonanzkreis mit wesentlich geringerer Dämpfung einwirkt.

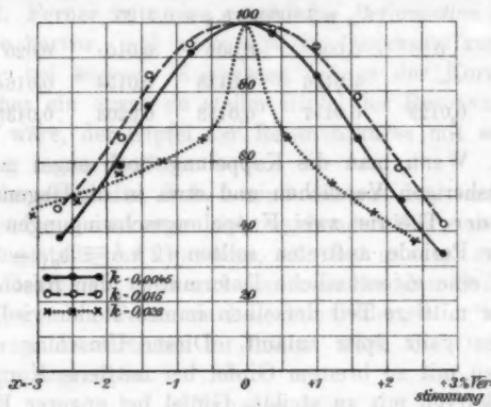


Fig. 5. Beobachtung der Rückwirkung.

§ 15. Ich glaubte anfangs¹⁾ die Erscheinung durch ein stärkeres Hervortreten der Korrektion B (vgl. p. 633) bei engerer Koppelung erklären zu können, jedoch könnte dadurch, wie oben auseinandergesetzt, nur eine verhältnismäßig geringe Deformation der Resonanzkurve eintreten, nicht aber ein so ausgesprochen spitzer Verlauf des Gipfels, wie in Fig. 5. Der eigentliche Grund liegt in den eigentümlichen Eigenschaften des Funkens, dessen Widerstand während der Entladung schnell anwächst und dadurch zu dieser und zu anderen Abweichungen von der Theorie Veranlassung gibt. Ich möchte jedoch hier noch nicht näher auf diese Dinge eingehen, sondern später in einem der nächsten Abschnitte dieser Arbeit die Eigenschaften des Funkens und die einschneidende Rolle, welche

1) Vgl. meinen Vortrag auf der Naturforscher-Versammlung in Dresden (Physik. Zeitschr. 8. p. 724. 1907).

er bei Kondensatorschwingungen spielt, im Zusammenhang besprechen.

§ 16. Daß tatsächlich die soeben besprochenen Abweichungen von der Theorie auf der Einwirkung des Funken beruhen, wird am besten dadurch bewiesen, daß die Abweichungen fortfallen, wenn man den Funken eliminiert. Wie dies geschieht, wird im folgenden Abschnitt gezeigt werden. Es seien hier nur die Resultate der Versuchsreihen angeführt, bei der ein funkenloser Kondensatorkreis in verschieden loser Koppelung auf einen Resonanzkreis wirkt.

Tabelle 8. Fig. 6.

$$C_1 = 3,49 \cdot 10^{-19}, \quad L_{11} = 97500, \quad C_2 = 1,37 \cdot 10^{-18}, \quad L_{22} = 24800.$$

$$b_{01} = 0,014, \quad b_{02} = 0,0087, \quad 1^\circ C^0 = \frac{C_2}{1952} \text{ *)}$$

C°	$k = 0,00033$	$0,00061$	$0,0012$	$0,0020$	$0,0027$	$0,0038$
76	—	—	26,2	—	—	40,9
80	81,3	33,5	33,7	35,6	42,7	50,6
84	41,3	40,4	44,4	46,6	54,5	60,8
88	56,2	57,9	58,4	60,1	67,6	73,8
92	75,2	74,8	76,6	77,3	82,2	84,1
96	90,5	90,5	92,2	92,0	94,9	94,4
100	100	100	100	100	100	100
104	93,7	93,7	95,3	96,4	96,8	97,9
108	77,6	78,2	80,5	82,8	85,4	90,9
112	59,0	60,8	64,0	68,1	70,7	79,7
116	45,4	44,1	48,5	51,6	56,9	67,0
120	34,0	35,1	37,2	39,4	45,8	55,1
124	—	—	27,7	—	—	45,7

In der Fig. 6 sind die Kurven für die schwächste und für die stärkste Koppelung gezeichnet, und außerdem die beobachteten Punkte für die Koppelungen $k = 0,0020$ (• • •) und $k = 0,0027$ (× × ×) eingetragen.

1) Zur feineren Einstellung war hier ein kleinerer variabler Luftkondensator dem Kondensator des Meßkreises II geschaltet. $1^\circ C^0$ gibt an, um wieviel bei Verstellung dieses Zusatzkondensators um 1° die ganze Kapazität C_2 verändert wurde. (Vgl. auch R. v. Traubenberg u. B. Monasch, Physik. Zeitschr. 8. p. 925. 1907.)

Aus dem Anblick der Figur ergibt sich, daß hier eine viel stärkere Verflachung der Resonanzkurve infolge der Kopplung eintritt, als bei Funkenerregung überhaupt erreichbar war.

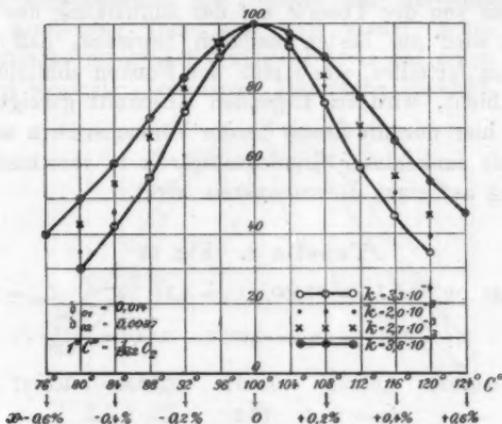


Fig. 6. Beobachtung der Rückwirkung.

§ 17. Bei dem Vergleich mit der Theorie ist zu berücksichtigen, daß die Differenz der Dekrete $b_{01} - b_{02} = 0,0053$ sehr klein ist, und daher von $k = 0,0012$ ab „die Koppelung vorherrschend ist“ ($2\pi k > |b_{01} - b_{02}|$). Dabei soll nach der oben abgeleiteten Theorie nur eine Verflachung der Resonanzkurve eintreten ohne merkliche Deformation, und aus der Kurve sich statt $b_{01} + b_{02}$ der zu große Wert

$$\sqrt{(\mathfrak{d}_{01} + \mathfrak{d}_{03})^2 + 4\pi^2 k^2}$$

ergeben.

Tabelle 9.

<i>y</i>	<i>k</i> = 0,00033	0,00061	0,0012	0,0020	0,0027	0,0038
80	0,0228	0,0229	0,0244	0,0255	0,0290	0,0342
70	0,0229	0,0230	0,0246	0,0257	0,0290	0,0341
60	0,0227	0,0229	0,0244	0,0255	0,0288	0,0341
50	0,0227	0,0231	0,0242	0,0252	0,0288	0,0340
Mittelwert	0,0228	0,0230	0,0244	0,0255	0,0289	0,0341
Berechneter Wert	0,0228	0,0230, _b	0,0240	0,0259	0,0283	0,0331

Die vorstehende Tab. 9 enthält die Dekremente, wie sie sich aus den verschiedenen Teilen der Kurve berechnen, dann den Mittelwert daraus und schließlich in der letzten Horizontalreihe die nach der Formel

$$\sqrt{0,0227 + 4 \pi^2 k^2}$$

berechneten theoretischen Werte.

Die gute Übereinstimmung der aus den einzelnen Teilen der Resonanzkurven gewonnenen Dekrementen beweist, daß keine merkliche Deformation eingetreten ist. Die Mittelwerte stimmen innerhalb der Fehlergrenzen mit den berechneten Werten überein: mithin entspricht, sobald kein Funke im Schwingungskreis ist, die ganze Erscheinung durchaus der Theorie.

Dasselbe gilt auch für die Bestimmung des Dekrementes b_{02} für sich durch Hinzufügung eines bekannten Dekrementes γ , wie aus der folgenden Tabelle hervorgeht. In der letzten Horizontalreihe sind die nach der theoretischen Formel (p. 635)

$$b_2 = b_{02} + \frac{\pi^2 k^2}{b_{01}} = 0,0087 + \frac{\pi^2 k^2}{0,014}$$

berechneten Werte angegeben.

Tabelle 10.

$k =$	0,00083	0,00061	0,0012	0,0020	0,0027	0,0038
b_2 beob.	0,0087	0,0091	0,0099	0,0117	0,0145	0,020
b_2 ber.	0,0088	0,0091	0,0097	0,0115	0,0189	0,019

Resultate des Abschnittes L

§ 18. Aus der Theorie folgt, daß bei zu enger Koppelung zwischen Oszillator und Resonator, sobald k^2 nicht mehr klein ist gegen $b_{01} b_{02} / \pi^2$, die Resonanzkurve zu flach ausfällt, und die aus ihr berechneten Dekrementa zu große Werte ergeben. Bei Versuchen mit Schwingungskreisen ohne Funkenstrecke wurde die Theorie qualitativ und quantitativ bestätigt.

Bei Funkenerregung zeigten sich Abweichungen insofern, als 1. die Resonanzkurve mit wachsender Koppelung immer stärker deformiert wird, 2. das Anwachsen des Dekrementes nicht so stark ist, als die Theorie es verlangt, und 3. bei enger Koppelung eigentümliche spitze Kurven auftreten. Diese Abweichungen von der Theorie sollen noch näher untersucht werden.

Für die experimentelle Bestimmung des Dekrementes nach der Bjerknesschen Methode ist daher Vorsicht geboten: man muß für exakte Messungen dazu sorgen, daß k^2 klein gegen $b_{01} b_{02}/\pi^2$ ist. Wenn sich k nicht bestimmen läßt, so muß man prüfen, ob bei Änderung der Koppelung die Resonanzkurve ungeändert bleibt. Um hierbei die Wirkung deutlich hervorgetreten zu lassen, ist die Koppelung mindestens zu verdoppeln, der Maximalausschlag also 4 mal so groß zu machen als der, mit dem man nachher die eigentliche Messung auszuführen beabsichtigt. Bei Funkenerregung ist die Wirkung zwar viel kleiner, sie kann aber doch, wie aus den obigen Beispielen ersichtlich, gerade bei kleinen Kapazitäten, wo die Gefahr zu enger Koppelung besonders nahe liegt, recht beträchtlich sein.

II. Erzeugung schwach gedämpfter Schwingungen.¹⁾

§ 19. Es ist schon mehrfach der Wunsch ausgesprochen, den störenden Funken bei den Dämpfungsmessungen zu eliminieren.²⁾ Der Weg dafür ist gegeben: es muß der die Funkenstrecke enthaltende Primärkreis in einem geschlossenen Sekundärkreis induktiv elektrische Schwingungen erregen. Die Schwierigkeit der Verwendung dieser Anordnung liegt in folgendem: Die beiden Kreise müssen so lose miteinander gekoppelt sein, daß kein merklicher Einfluß des durch die Funkenstrecke stark gedämpften Primärkreises auf die Dämpfung des Sekundärkreises mehr stattfindet. Andererseits soll die auf den Sekundärkreis übertragene Energie doch so groß sein, daß sie, zunächst einmal für Meßzwecke, ausreicht.

Zum Studium dieser Frage hielt ich es für nötig, zuerst die gegenseitige Einwirkung zweier lose gekoppelter Systeme theoretisch und experimentell zu untersuchen. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind im vorigen Abschnitt dargestellt und dienen dem folgenden als Grundlage.

§ 20. Ein stark gedämpftes Primärsystem (Fig. 7, I) wirkt durch lose Koppelung auf ein schwach gedämpftes, gleich-

1) Ein vorläufiger Bericht über die Ergebnisse dieses Abschnittes erschien in der Physik. Zeitschr. 9. p. 49. 1908.

2) Vgl. z. B. die Bemerkung von O. Wiener in der Diskussion zu meinem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Dresden (Physik. Zeitschr. 1907. p. 766).

mit dem ebenfalls schwach gedämpften Meßkreis (III) gekoppelt, so daß keine merkliche Rückwirkung auf II vorhanden ist. Unsere Aufgabe besteht darin, die Systeme I und II so zu gestalten, daß die Resonanzkurve des Stromeffektes im Meßkreise merklich nur noch von der Dämpfung des Sekundärsystems abhängt, die des Primärsystems ohne Einfluß ist.

Nach zwei Richtungen hin kann der Primärkreis einen Einfluß ausüben.

Einmal entstehen bei loser Koppelung im Sekundärkreis zwei Schwingungen mit annähernd gleicher Anfangsamplitude. Die eine besitzt annähernd das Dekrement des Primärkreises

$$\left(\delta_1 = \delta_{01} - \frac{\pi^2 k_{12}^2}{\delta_{01} - \delta_{02}} \right),$$

die andere annähernd das des Sekundärkreises

$$\left(\delta_2 = \delta_{02} + \frac{\pi^2 k_{12}^2}{\delta_{01} - \delta_{02}} \right).$$

Der Stromeffekt in dem schwach gedämpften Meßkreis sinkt sehr schnell — schließlich quadratisch —, wenn die Dämpfung der zu messenden Schwingung steigt.¹⁾ Der Stromeffekt der schwach gedämpften der beiden Schwingungen des Sekundärsystems wird also *sehr groß* sein gegen den der stark gedämpften Schwingung, wenn das Dekrement des Primärkreises *groß* ist gegen das des Sekundärkreises. Wir können uns mithin von dem Einfluß der störenden stark gedämpften zweiten Schwingung befreien, wenn wir die Dämpfung des primären Systems *groß* genug gegenüber der des sekundären Systems machen.

Ein weiterer Einfluß des Primärsystems besteht darin, daß das Dekrement der schwach gedämpften Schwingung des bestimmten Sekundärsystems II. Dieses ist wieder sehr lose

1) Nach Bjerknes ist $J_{\text{refl.}}^2$ proportional $\frac{1}{\delta_{01} \delta_{02} (\delta_{01} + \delta_{02})}$ (vgl. p. 629).

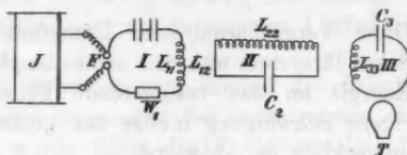


Fig. 7.

Sekundärsystems nicht gleich der des ungekoppelten Systems (b_{02}), sondern größer ist:

$$b_2 = b_{02} + \frac{\pi^2 k_{12}^2}{b_{01} - b_{02}}.$$

Diese Vergrößerung der Dämpfung führt daher, daß das Sekundärsystem während seines langsamem Abklingens dauernd Energie an das resonierende Primärsystem abgibt, dessen eigene Schwingung infolge der großen Dämpfung schon lange unmerklich geworden ist.

Unserer Formel nach sinkt der Wert des Korrektionsgliedes $\pi^2 k_{12}^2 / b_{01} - b_{02}$ ebenfalls mit steigender Dämpfung des Primärsystems, aber nur ungefähr proportional dem Dekrement. Um das Glied klein zu machen, müssen wir nicht nur b_{01} groß, sondern auch die Koppelung k_{12} möglichst lose machen.

§ 21. Im Hinblick auf diese Folgerungen der Theorie wurde die Versuchsanordnung zunächst so getroffen, daß das Dekrement des primären Systems durch Einschaltung von Widerstand sehr groß bis zu 0,5 gemacht wurde gegenüber einem Dekrement des sekundären Systems von ca. 0,01. Die Koppelung k_{12} wurde, um $\pi^2 k_{12}^2 / b_{01} - b_{02}$ unter 1 Proz. von $b_{02} = 0,01$ zu halten, sehr klein bis zu 0,001 gewählt. Um dabei noch die nötige Energie im Sekundärsystem zu erzielen, mußten sehr große Kapazitäten im Primärsystem verwandt werden bei entsprechend kleiner Selbstinduktion.

Im Verlauf der Versuche stellte es sich dann bald heraus, daß diese Vorsicht, was die Koppelung anbetrifft, nicht notwendig ist. *Man kann die Koppelung verhältnismäßig sehr eng machen, so eng, daß etwa der Punkt erreicht wird, wo der Theorie nach zwei Schwingungen mit verschiedenen Schwingungszahlen auftreten müßten, $2\pi k_{12} = b_{01} - b_{02}$, ja sogar noch darüber hinaus, ohne daß eine merkliche Änderung der Resonanzkurve des Stromeffektes eintritt.* Diese Abweichung von der Theorie beruht wieder auf den eigentümlichen Eigenschaften des Funkens. Der Funkenwiderstand wächst sehr schnell während der Entladung. Schon nach kurzer Zeit ist die Leitfähigkeit des Funkens sehr gering¹⁾, und der Kreis praktisch als un-

1) Vgl. J. Zenneck, Ann. d. Phys. 13. p. 822. 1904.

geschlossen zu betrachten. Daher hört der Energieabfluß des schwach gedämpften Sekundärsystems nach dem Primärsystem sehr bald auf, und es schwingt so, als ob es ungekoppelt wäre. In dem Ausdruck $b_{02} + (\pi^2 k^2 / b_{01} - b_{02})$ wird b_{01} bald sehr groß, so daß das gefährliche Glied von viel geringerem Einfluß ist, als die Theorie es ergibt.

§ 22. Experimentell habe ich den Einfluß des Primärsystems auf die Resonanzkurven des Sekundärsystems eingehend untersucht. Es wurde dabei die Funkenstrecke, die Dämpfung und die Koppelung des Primärsystems in weiten Grenzen geändert, auch wurden Primär- und Sekundärsysteme gegeneinander verstimmt. Vor allem lag mir natürlich daran, die Grenzen festzustellen, wo ein deutlicher Einfluß des Primärsystems hervorzutreten beginnt.

Das Resultat dieser Versuche war, daß es vor allem darauf ankommt, daß die Dämpfung des Primärsystems groß ist gegen die des sekundären. Ist diese Bedingung erfüllt, so kann die Funkenstrecke, die Verstimmung und in weiten Grenzen auch die Koppelung beliebig geändert werden, ohne daß eine Änderung der Resonanzkurve eintritt.

Von diesen Versuchen seien nur einige besonders charakteristische im folgenden angeführt:

Die Versuchsanordnung ist in Fig. 7 (p. 645) skizziert. Der Erregerkreis (I) nebst Induktorium usw. und der Meßkreis (III) waren etwa ebenso eingerichtet, wie oben bei den Versuchen über die Rückwirkung (p. 636). Hier trat nun noch der wenig gedämpfte Sekundärkreis (II) hinzu, über den ich noch einige Angaben machen muß. Bei den im folgenden beschriebenen Versuchen bestand die Selbstinduktion, abgesehen von den Zuleitungen aus einem eng gewickelten Solenoid aus quadratischem (3×8 mm) Cu-Draht mit einer Windungszahl von 142, und einem Spulenradius von 3 cm. Als Kapazitäten dienten Luftkondensatoren (Fig. 8) ähnlich denen, wie sie von B. Monasch¹⁾ bei einer vor einiger Zeit im hiesigen Institut ausgeführten Untersuchung verwandt wurden. Sie bestanden im wesentlichen aus zwei koaxialen Zylindern aus Messingblech von 100 cm Höhe und ca. 2 cm Abstand. Die Kanten waren ab-

1) B. Monasch, Ann. d. Phys. 22. p. 905. 1907.

gerundet. Sie vertrugen ohne merklichen Verlust recht hohe Spannungen. Die Kapazität war allerdings nur klein: die vier Kondensatoren, welche bei den Versuchen verwandt wurden, besaßen \parallel geschaltet eine Kapazität von $0,77 \cdot 10^{-3}$ M.F.

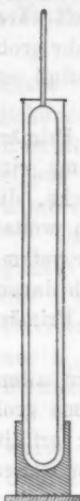


Fig. 8.

§ 23. Der eine der Versuche, welche hier beschrieben werden sollen, möge als Beispiel dafür dienen, daß auch bei verhältnismäßig enger Kopplung der Primärkreis ohne merkliche Wirkung auf die Resonanzkurve des Sekundärkreises bleibt, wenn nur die Dämpfung des Sekundärkreises klein gegen die des Primärkreises ist.

Der Primärkreis bestand einfach aus Leydener Flaschen und dem Schließungsdräht ohne besonders zur Vermehrung der Dämpfung eingeschalteten Manganindraht. Sein Dekrement betrug ca. 0,14, das des Sekundärkreises 0,013. Eine Resonanzkurve wurde bei der Koppelung $k = 0,01$ ¹⁾, eine zweite für $k = 0,03$ aufgenommen. Nach der Formel

$$b_2 = b_{02} + \frac{\pi^2 k^2}{b_{01} - b_{03}}$$

hätte im Fall I

$$b_2 = 0,013 + \frac{\pi^2 \cdot 0,01^2}{0,14 - 0,013} = 0,020,$$

im Fall II

$$b_2 = 0,013 + \frac{\pi^2 \cdot 0,03^2}{0,14 - 0,013} = 0,083$$

sein müssen. Die Resultate der Versuche sind in Tab. 11 und Fig. 9 gegeben.

Wie aus der Fig. 9 ersichtlich, liegen die Punkte II ($\times \times \times$) teils über, teils unter der Kurve I, die Differenzen fallen durchaus in das Gebiet der damaligen Versuchsfehler. Die Werte von $b_{02} + b_{03}$ für die verschiedenen Ordinaten der Kurven sind in der Fig. 9 seitlich daneben geschrieben, links für $k = 0,01$, rechts für $k = 0,03$; ihre Mittelwerte (0,0220 und 0,0218) sind merklich gleich, so daß keine Wirkung der engeren Koppelung hervortritt.

1) Wegen der Form der Rollen konnte die gegenseitige Induktion hier nicht genau berechnet werden; die angegebenen Werte von k sind daher nur als Näherungswerte zu betrachten.

Tabelle 11.

 $C_1 = 5,1 \cdot 10^{-10}, \quad L_1 = 6600 \text{ cm}, \quad b_{01} = 0,14, \quad b_{02} = 0,013, \quad b_{03} = 0,0089,$

$C_2 = 3,49 \cdot 10^{-10}, \quad L_2 = 97500, \quad 1^{\circ} C_3^0 = \frac{1}{2040} C_3.$

I. $k = 0,01$ II. $k = 0,03$

C_3^0	α_{100}	α_{100}
80	37,8	35,4
85	50,9	49,8
90	68,3	68,6
95	88,6	87,8
100	100	100
105	90,5	88,6
110	66,6	65,0
115	48,0	45,6
120	29,9	31,9

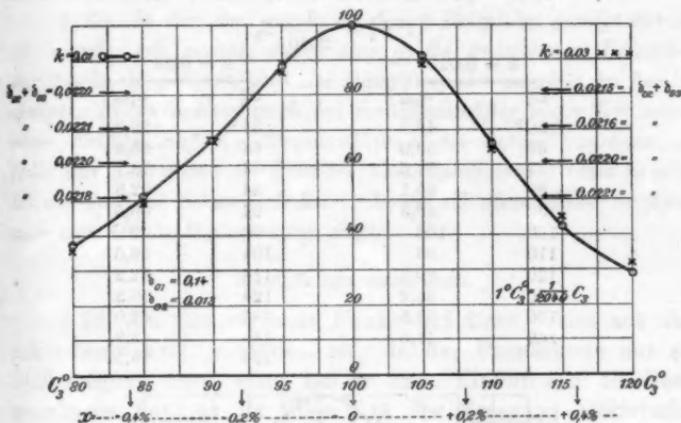


Fig. 9.

Der Stromeffekt war hier sehr hoch und erreicht für eine Koppelung in der Nähe von $2\pi k_{12} = |b_{01} - b_{02}|$ sein Maximum. Bei noch engerer Koppelung sinkt der Stromeffekt wieder ziemlich schnell, die Resonanzkurve wird immer flacher und bald treten die regulären beiden Koppelungsschwingungen hervor, deren Dämpfung etwa gleich dem arithmetischen Mittel der beiden Dämpfungen der Einzelsysteme ist. Über diese Fragen, die mit den eigentümlichen Eigenschaften des Funkens zusammenhängen, wird, wie gesagt, später ausführlicher berichtet werden.

§ 24. Der zweite Versuch soll zeigen, bei welchem Verhältnis der Dekremente (b_{01}/b_{02}) die Wirkung des Primär-

systems eben merklich zu werden beginnt. Ist b_{01} nicht mehr groß gegen b_{02} , so ist auch die Zeit, während welcher der Primärkreis als durch den Funken geschlossen zu betrachten ist, nicht mehr verschwindend klein, und dann wird die der Theorie entsprechende Vergrößerung der Sekundärdämpfung mit der Koppelung wieder merklich. Wir haben soeben gesehen, daß dies bei dem 10 fachen Dekrement noch nicht eintrat, wohl aber ließ sich bei dem 6 fachen Dekrement schon ein Einfluß feststellen.

Tabelle 12. Fig. 10.

$$C_1 = 5,1 \cdot 10^{-18}, \quad L_{11} = 6600, \quad b_{01} = 0,36 \text{ (durch Manganindraht vergrößert),}$$

$$C_2 = 8,49 \cdot 10^{-19}, \quad L_{22} = 97100, \quad b_{02} = 0,06, \quad b_{03} = 0,008.$$

$$1^{\circ} C_3^0 = \frac{1}{2040} C_3.$$

C_3^0	α_{100}	C_3^0	α_{100}
50°	46,8	54°	50,3
60	58,0	64	63,4
70	71,6	74	78,1
80	85,1	84	92,6
90	98,5	94	99,5
100	100	96	100
110	93	104	98,0
120	80,6	114	92,2
130	65,2	124	76,5
140	53,5	134	62,0
150	41,5	144	48,9
		154	39,5

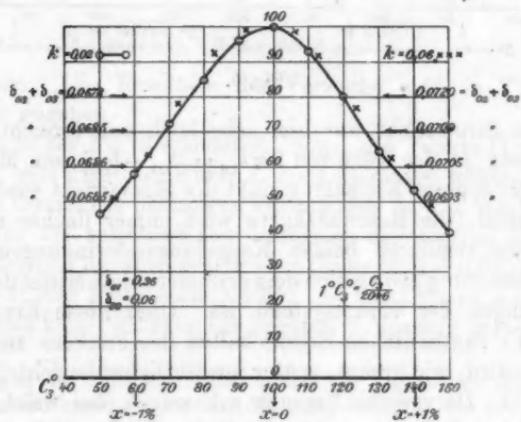


Fig. 10.

Es tritt hier deutlich hervor, daß die Resonanzkurve für engere Koppelung besonders im oberen Teil etwas breiter ist, die $\times \times$ liegen merklich höher als die $\circ \circ \circ$ -Kurve. Die aus den Kurven berechneten Dekremente steigen bei der engeren Koppelung nach der Spitze der Kurve zu an (vgl. Fig. 10), 0,0693 bis 0,0720. Der Mittelwert 0,0707 liegt etwa 3,5 Proz. höher als bei der Kurve für losere Koppelung (0,0683).

Macht man die Dämpfung des Sekundärkreises noch größer im Verhältnis zu der des Primärkreises, so steigt der Einfluß des Primärkreises und damit der der Koppelung auf die Resonanzkurve des Sekundärkreises schnell an.

§ 25. In der Art, wie es an diesen Beispielen gezeigt worden ist, wurde, wie gesagt, durch eine große Anzahl von Versuchen der Nachweis geführt, daß die Dämpfung des durch einen Funken erregten Primärkreises auch bei verhältnismäßig enger Koppelung ohne Einfluß auf die Resonanzkurve des Sekundärsystems ist, falls das Dekrement des Primärkreises mindestens 10 mal so groß ist als das des Sekundärkreises. Innerhalb dieser Grenzen findet also eine ideale Stoßregung statt.

Dämpfungsmessungen.

§ 26. Da der störende Funke auf diese Weise aus dem sekundären Kreis eliminiert ist, da der Primärkreis nur zur Stoßregung dient, ohne daß er einen Einfluß auf die Resonanzkurve hat, so ist diese Art der Erregung elektrischer Schwingungen vorzüglich geeignet, um die anderen Ursachen der Dämpfung zu untersuchen.

Im folgenden soll an einem Beispiel ausführlicher gezeigt werden, wie genau sich derartige Dämpfungsmessungen ausführen lassen.

Die Versuchsanordnung war die gleiche wie oben (p. 647). Die Aufnahme der Resonanzkurve geschah in der Weise, daß der Stromeffekt des Meßkreises nicht wie vorher mittels eines Bolometers, sondern mit Hilfe von Thermoelementen gemessen wurde. Die Thermoelemente erwiesen sich, wenigstens bei meinen Versuchen, als empfindlicher und auch als sicherer, weil der Nullpunkt des Galvanometers ruhiger war, als bei meiner Bolometeranordnung.

Das Dekrement des Primärkreises wurde durch Hinzufügung von Manganindraht so groß gemacht, daß es stets mindestens 20mal so groß war als das des Sekundärkreises. Eine große Dämpfung des Primärsystems ist auch insofern bequem, als die Einstimmung mit dem Sekundärkreis nur eine ganz rohe zu sein braucht.¹⁾ Funkenstrecke, Anzahl der Funken, Größe der Kapazität im primären Kreis konnten in gewissen Grenzen beliebig gewählt werden, so daß man sich so einrichten konnte, daß die Funken möglichst regelmäßig wurden, und alles ruhig und gleichmäßig funktionierte. Das Induktorium gab, wie erwähnt, sehr gleichmäßige Funken, die Hauptfehlerquelle lag in kleinen Ungleichförmigkeiten im Gang des Motors, der den Turbinenunterbrecher trieb. Sie bewirken kleine Abweichungen in der aufgenommenen Resonanzkurve, auf die ich unten nochmals zurückkommen werde. Ich hoffe durch Anwendung eines größeren, gut gebremsten Motors noch präzisere Resultate zu erzielen.

Eine andere Fehlerquelle, die sich leicht vermeiden läßt, auf die jedoch sorgfältig geachtet werden muß, besteht in einer eventuellen direkten Wirkung des Primärkreises auf den Meßkreis. Bei geöffnetem Sekundärkreis darf das mit dem Thermoelement verbundene Galvanometer keinen Ausschlag zeigen.

Daß die Koppelung des Sekundärsystems mit dem Meßkreis eine äußerst lose sein mußte, ist nach dem vorigen Abschnitt selbstverständlich.

§ 27. Der zu beschreibende Versuch, welcher ein Bild von der Präzision der Messmethode geben soll, bestand darin, daß das Dekrement des Sekundärsystems einmal direkt gemessen wurde, dann unter Einschaltung eines bekannten Widerstandes, wodurch das Dekrement um eine bekannte Größe vermehrt wurde. Es sind im folgenden für jede Messung zwei Versuchsreihen, die unmittelbar hintereinander gewonnen waren, angegeben.

In den Tabellen sind zunächst die Konstanten der Stromkreise und sonstigen Versuchsbedingungen angegeben, dann

1) Durch eine eventuelle Verstimmung des Primärkreises wird nur die übertragene Energie vermindert, auf die Resonanzkurve hat, wie oben erwähnt, die Verstimmung keinen Einfluß.

die Messungen selbst. In der ersten Reihe, wie oben, die Teilstriche des kleinen Zusatzkondensators im Meßkreis, dann die abgelesenen Galvanometerausschläge, schließlich die für den Maximalwert 100 umgerechneten Galvanometerausschläge.

Tabelle 13. $W_s = 0$.

$$C_1 = 5,1 \cdot 10^{-18}, \quad L_{11} = 6800 \text{ cm}, \quad F_s = 0,6 \text{ cm}, \quad d_{01} = 0,36.$$

$$C_2 = 3,60 \cdot 10^{-19}, \quad L_{22} = 97100 \text{ cm}, \quad C_3 = 1,50 \cdot 10^{-18}, \quad L_{33} = 23400,$$

$$1^\circ C_3^0 = \frac{1}{2064} C_3.$$

a (Fig. 11).

C_3^0	α	α_{100}
84°	24,2	37,7
88	33,8	52,7
92	45,2	70,5
96	58,2	90,8
100	64,1	100
104	59,0	92,0
108	48,0	74,8
112	36,1	56,8
116	27,0	42,1

b (Fig. 12).

C_3^0	α	α_{100}
84°	24,0	37,2
88	33,1	51,3
92	45,2	70,1
96	58,0	89,9
100	64,5	100
104	58,0	89,9
108	48,0	74,4
112	36,0	55,8
116	27,8	43,2

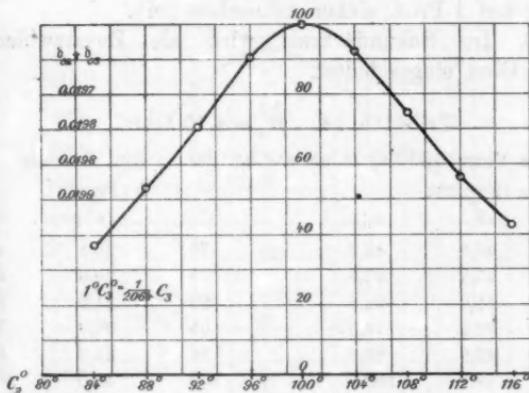


Fig. 11.

Bei der zweiten Versuchsreihe war der Gang des Motors des Turbinenunterbrechers nicht ganz regelmäßig. In der

Fig. 12 ist das darin zu erkennen, daß die Beobachtungswerte auf der rechten Seite der Figur nicht so gut in die Kurve hineinpassen wie sonst.¹⁾ Der aus der Kurve gewonnene Wert von $b_{02} + b_{03}$ weicht trotzdem nur wenig von

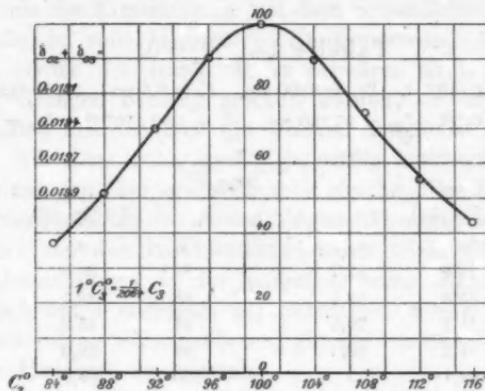


Fig. 12.

dem aus der anderen Beobachtungsreihe gewonnenen Werte ab: 0,01952 gegen 0,01980. Der Mittelwert beider 0,01966 dürfte als auf 1 Proz. sicher anzusehen sein.

§ 28. Im Sekundärkreis wird als Zusatzwiderstand $W_s = 4,15$ Ohm eingeschaltet.

Tabelle 14. $W_s = 4,15$ Ohm.

Die Versuchsbedingungen wie bei der vorigen Messung.

<i>a</i> (Fig. 13).			<i>b</i> (Fig. 14).		
C_s^0	α	α_{100}	C_s^0	α	α_{100}
70°	20,8	42,8	70°	20,1	41,9
75	25,7	52,9	75	25,3	52,7
80	31,5	64,8	80	31,0	64,6
85	37,2	76,5	85	36,9	76,9
90	42,9	88,3	90	42,2	87,9
100	48,6	100	100	48,0	100

1) Da beim Anpassen der Kurve an die Beobachtungspunkte subjektive Einflüsse sich nicht ganz vermeiden lassen, habe ich dies durch einen geschickten technischen Zeichner ausführen lassen, dem die Bedeutung der Kurven nicht bekannt war.

Tabelle 14 (Fortsetzung).

C_3^o	α	α_{100}	C_3^o	α	α_{100}
110°	44,0	90,6	110°	43,1	89,8
115	39,5	81,8	115	39,0	81,8
120	34,5	71,0	120	34,2	71,8
125	30,0	61,7	125	30,2	62,9
130	26,2	58,9	130	25,9	54,0
135	23,0	47,3	135	22,9	47,6

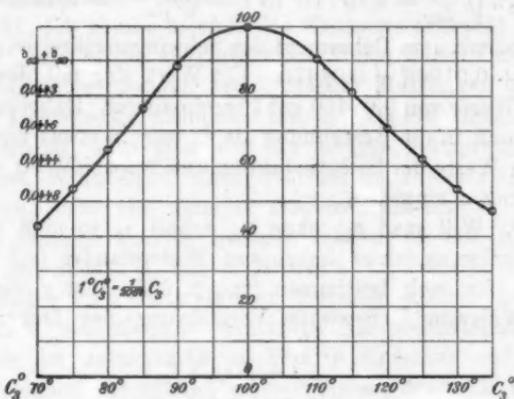


Fig. 13.

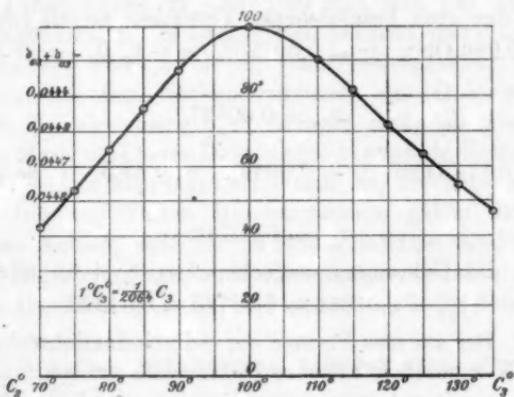


Fig. 14.

Die Kurven verlaufen diesmal beide durchaus regelmäßig. Sowohl die Abweichungen der aus den einzelnen Teilen einer

Resonanzkurve gewonnenen Werte von dem Mittelwert dieser Kurve, als auch die der Mittelwerte der beiden Kurven 0,04452 und 0,04468 liegen unter $\frac{1}{2}$ Proz.¹⁾ Resultat der Messung: $b_{03} + b_{08} = 0,04460$.

Die durch die Hinzufügung von $W_z = 4,15$ Ohm nach der Theorie zu erwartende Vermehrung des Dekrementes beträgt:

$$W_z \cdot \pi \sqrt{\frac{C_2}{L_m}} = 4,15 \cdot 10^6 \cdot \pi \sqrt{\frac{3,60 \cdot 10^{-19}}{97100}} = 0,02509,$$

ergibt also mit dem Dekrement des Schwingungskreises ohne W_z $0,02509 + 0,01966 = 0,04475$. Ein Wert, der mit dem beobachteten Werte von 0,04460 gut übereinstimmt. Dabei ist zu bemerken, daß in die Berechnung die immerhin etwas unsicheren absoluten Werte der Selbstinduktion und Kapazität für schnelle Schwingungen eingehen.

§ 29. Will man b_{03} ohne b_{08} erhalten, so muß man b_{03} durch Einfügung eines bekannten Widerstandes (w_y) in den Meßkreis für sich bestimmen (vgl. p. 635). Ist γ die durch diesen Widerstand bewirkte Vermehrung des Dekrementes, so ist:

$$b_{03} = \frac{1 + \gamma/b_{03} + b_{08}}{\alpha/\alpha_y - (1 + \gamma/b_{03} + b_{08})},$$

worin α und α_y die Galvanometerausschläge ohne und mit w_y sind.

Bei den eben beschriebenen Versuchen erhielt ich für

$$w_y = 0,286 \text{ Ohm} \quad (\gamma = 0,00720), \quad \alpha = 65,0, \quad \alpha_1 = 24,1.$$

Hieraus

$$b_{03} = 0,00737$$

und für

$$w_y = 0,174 \text{ Ohm} \quad (\gamma = 0,0044), \quad \alpha = 63,5, \quad \alpha_1 = 32,7.$$

Hieraus

$$b_{03} = 0,00743.$$

Demnach das Dekrement des sekundären Systems allein:

$$b_{03} = 0,01966 - 0,00740 = 0,01226.$$

§ 30. Bei anderen Formen der Selbstinduktionsrollen kann man noch wesentlich kleinere Dekemente erzielen; z. B. erhielt ich bei einer kurzen weiten Rolle aus 5×5 mm Cu-Draht

1) Gewisse kleine Unsymmetrien, die hier uns auch sonst besonders in den unteren Teilen der Resonanzkurven merklich sind, bedürfen noch der Aufklärung; auf die Meßresultate scheinen sie ohne Einfluß zu sein.

$\delta_{03} = 0,006$. Da die Stoßerregung, wie oben auseinander gesetzt wurde, um so besser funktioniert, je kleiner die Dämpfung des Sekundärsystems ist, so liegt in der Erregung kein Hindernis, *elektrische Schwingungen von beliebig kleinem Dekrement zu erzeugen*. Es kommt nur darauf an, wie weit es gelingt, durch geeignete Konstruktion der Selbstinduktions spulen und Kondensatoren das Dekrement des Sekundärkreises selbst herunter zu drücken.

§ 31. Ich glaube hiermit den Nachweis erbracht zu haben, daß sich mit in der beschriebenen Weise durch Stoßerregung erzeugten Schwingungen recht genaue Messungen auch sehr kleiner Dekrete ausführen lassen. Da der störende Funke eliminiert ist, so lassen sich die übrigen Dämpfungsursachen (effektiver Widerstand, Energieverlust im Dielektrikum, Strahlung usw.) sehr viel genauer studieren als bisher. Derartige Untersuchungen sind im hiesigen Institut im Gange.

§ 32. Kürzlich haben Rausch v. Traubenberg und Monasch¹⁾ eine Methode zur Messung kleiner Dekrete mit Hilfe *ungedämpfter* Schwingungen beschrieben.¹⁾ Diese Methode ist naturgemäß im Prinzip einfacher und zweifellos sehr geeignet, um schnell einen Näherungswert für das Dekrement zu erhalten. Für exakte Messungen liegt jedoch eine große Schwierigkeit in den Schwankungen der Periode des Poulsengenerators. Es ist mir wohl bekannt, daß diese Schwankungen, die sich ja anfangs sehr unangenehm bemerkbar machten, bei den Neukonstruktionen des Generators durch Hrn. v. Traubenberg viel geringer sind, ob aber eine für genaue Messung kleiner Dekrete genügende Konstanz schon erreicht ist, ja überhaupt erreichbar ist, erscheint mir zweifelhaft. Die angeführten Resonanzkurven geben dafür keinen sicheren Anhalt, weil sie zu steil gezeichnet sind²⁾, und das ihnen zugrunde liegende Beobachtungsmaterial nicht zahlmäßig angeführt ist. Es wird gesagt, daß die Schwankungen

1) Rausch v. Traubenberg u. B. Monasch, Physik. Zeitschr. 8. p. 925. 1907.

2) Um Abweichungen von der Kurvenform am deutlichsten erkennbar zu machen, müssen die Resonanzkurven so gezeichnet werden, daß die wichtigsten Teile derselben ($y = 50$ bis 80) etwa unter 45° zur Abszissenachse geneigt sind.

der Periode weniger als $\pm 0,1$ Proz. betragen hätten. In einer neueren Arbeit¹⁾ gibt Hr. v. Traubenberg als Grenze 0,035 Proz. an.

In der folgenden Tabelle ist berechnet, welchen Einfluß kleine Schwankungen ($\pm \epsilon$) der Periode auf den Stromeffekt im Meßkreis haben, wenn das zu messende Dekrement $b = 0,01$ ist. Die Ordinate der Resonanzkurve ist bei ungedämpften Schwingungen einfach

$$y = \frac{100}{1 + \frac{4 \pi^2 x^2}{b^2}}.$$

Der für die Berechnung des Dekrementes wichtigste Teil der Resonanzkurve liegt bei $y = 50$ bis 80. Für $x = 0,001$ wird bei $b = 0,01$ $y = 71,7$. Statt 71,7 erhalten wir dafür bei Schwankungen der Schwingungszahl um $\pm \epsilon$ die Werte:

$\epsilon =$	$+0,10\%$	$-0,10\%$	$+0,035\%$	$-0,035\%$
$y =$	88,5	100	58,1	85,5
$\epsilon =$	$+0,01\%$	$-0,01\%$	$+0,001\%$	$-0,001\%$
$y =$	67,5	75,7	71,3	72,1

Wenn das zu messende Dekrement = 0,005 ist, so werden die Differenzen bei gleichem ϵ noch viermal so groß. Also erst bei Schwankungen der Schwingungszahl, die kleiner sind als $\pm 0,001$ Proz., wird bei der Messung kleiner Dekrete eine Konstanz des Ausschlags von 1—2 Proz. erreicht. Inwieweit die Schwankungen der Periode die Messung beeinflussen, hängt natürlich ganz davon ab, wie oft und in welcher Art sie eintreten; ob die Wechselzahl um einen Mittelwert hin und her pendelt, oder ob sie sich kontinuierlich ändert, oder sprungweise für längere Zeit einen anderen Wert annimmt. Jedenfalls liegt darin eine erhebliche Schwierigkeit für präzise Messungen, die eingehender Untersuchung bedarf. Auf der anderen Seite ist die Konstanz der Periode ein nicht zu unterschätzender Vorzug der Funkenerregung.

§ 33. Ob die beschriebene Art der Stoßerregung auch zur Erzeugung starker elektrischer Schwingungen mit geringer

1) Rausch v. Traubenberg, Jahrbuch f. Telegraphie ohne Draht 2. p. 307. 1908.

Dämpfung, also für Zwecke der drahtlosen Telegraphie geeignet ist, hängt im wesentlichen davon ab, wieviel Energie sich von dem primären auf das sekundäre System übertragen läßt, ohne daß die Dämpfung der Schwingungen in letzterem infolge der Koppelung erheblich größer wird. Hierüber soll im nächsten Abschnitt dieser Arbeit berichtet werden.

Resultate des Abschnittes II.

§ 34. Um den störenden Funken bei Dämpfungsmessungen zu eliminieren, wurden die in einem Primärkreis durch eine Funkenstrecke erregten Schwingungen durch magnetische Kopplung auf einen geschlossenen Sekundärkreis übertragen (*Stoßerregung*). Der Theorie nach wird dabei die Resonanzkurve des Sekundärsystems nicht mehr merklich von dem Primärsystem beeinflußt, wenn $\pi^2 k^2 / b_{01} - b_{02}$ neben b_{02} verschwindet (b_{01}, b_{02} Dekrementa der beiden Kreise, k Koppelungskoeffizient). Bei den Versuchen wurde daher zunächst k sehr klein, b_{01} groß gemacht (§§ 19 und 20).

Es zeigte sich jedoch, daß entgegen der Theorie die Kopplung verhältnismäßig sehr eng gemacht werden kann, ohne daß die Resonanzkurve sich ändert, wenn nur die Dämpfung des Sekundärkreises klein ist gegen die des Primärkreises. Der Grund dieser Abweichung von der Theorie ist in dem schnellen Anwachsen des Funkenwiderstandes während der Entladung zu suchen. Wegen der engen Koppelung kann so verhältnismäßig viel Energie auf das Sekundärsystem übertragen und starke wenig gedämpfte Schwingungen erzeugt werden (§§ 21—25).

Die Messung des Dekrementes ist bei diesen Schwingungen eine recht präzise, da im Sekundärsystem der störende Funke fortfällt, und im Primärsystem die günstigste Funkenstrecke, Kondensatorgröße usw. beliebig ausgewählt werden kann, bei der alles am regelmäßigsten funktioniert. Es gelang, Dekrementa von der Größenordnung 0,01 mit Sicherheit auf 1 Proz. zu messen (§§ 26—31).

Danzig-Langfuhr, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule,
28. Januar 1908.

(Eingegangen 30. Januar 1908.)

2. Magnetische Atomfelder und Serienspektren;
von W. Ritz.

Bekanntlich beziehen sich alle bis jetzt in den Linienpektren gefundenen, einfachen Gesetze — wie die Balmersche Formel, das Gesetz der konstanten Differenzen usw. — auf die Schwingungszahlen, und nicht auf deren Quadrate. Es liegt hierin für die Erklärung dieser Spektren eine besondere Schwierigkeit, auf die Lord Rayleigh¹⁾ aufmerksam gemacht hat: wenn ein mechanisches oder akustisches System kleine Schwingungen ausführt, so daß die Zeit nur in der Form eines Faktors $\sin \nu(t - t_0)$ in die Lösung eingeht, so wird durch Bildung der Akzeleration, d. h. durch zweimalige Differentiation nach t , der Faktor ν^3 eingeführt; die Gleichung, welche die Schwingungszahl ν bestimmt, wird also das Quadrat von ν enthalten, und es gelingt nur in Ausnahmefällen, die Schwingungszahlen selbst einfach auszudrücken.²⁾ Lord Rayleigh schließt hieraus, daß es sich bei den Spektren vielleicht um rein kinematische Beziehungen handle, in welche die Akzeleration nicht eingehe. Wie man sich diese zu denken hätte, und in welcher Weise man diese Annahme mit der Theorie der Dispersion, des Zeeman-Effektes usw., bei welchen die Trägheitsreaktion eine wesentliche Rolle spielt, in Einklang bringen könnte, ist allerdings kaum einzusehen. Der Schluß, daß zwischen den für den Zustand maßgebenden Größen nur Differentialgleichungen erster Ordnung in bezug auf die Zeit bestehen, läßt sich aber in anderer Weise aufrecht erhalten: man hat nur anzunehmen, daß jene Größen *Geschwindigkeiten*

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 44. p. 356. 1897.

2) Verfasser hat einige solche, den Spektralgesetzen entsprechende Fälle untersucht (Inaug.-Diss. Göttingen 1903; Ann. d. Phys. 12. p. 264. 1903). Die Komplikation der hierbei nötigen Annahmen, für die sich eine befriedigende physikalische Deutung nicht hat finden lassen, nötigt wohl, die dort gegebene Theorie fallen zu lassen, und ist eher geeignet, Lord Rayleighs Schlußweise zu stützen; vgl. Lord Rayleigh, Phil. Mag. (6) 11. p. 123. 1906.

sind, oder anders ausgedrückt, daß die wirkenden Kräfte nicht, wie gewöhnlich, von der *Lage* der Teile des Systems, sondern von deren Geschwindigkeiten abhängen. Dies ist bei *magnetischen Kräften* allgemein der Fall, und die Annahme intensiver magnetischer Atomfelder dürfte, auf Grund der im Gebiet des Magnetismus vorliegenden Tatsachen, kaum zu umgehen sein.¹⁾ Durch diese Überlegung wird also die Hypothese nahe gelegt, daß die *Schwingungen der Serienspektren durch rein magnetische Kräfte erzeugt werden*, und es soll im folgenden gezeigt werden, daß diese Annahme in einfacher Weise zum Verständnis der Gesetze der Serienspektren und der *anormalen Zeeman-Effekte* führt.

Es sei e die Ladung, m die Masse eines elektrischen Teilchens; befindet sich dasselbe in einem magnetischen Feld H parallel zur Z -Achse, so ist

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{eH}{c} \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{eH}{c} \frac{dx}{dt}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x = A \sin \frac{eH}{mc} (t - t_0), \quad y = A \cos \frac{eH}{mc} (t - t_0), \quad z = z_0 + Bt,$$

wo A , B , z_0 , t_0 willkürliche Konstanten bedeuten. Die Bewegung ist also, wie bekannt, helikoidal; sie zerfällt in eine gleichförmige Translation parallel H , und eine zirkulare Schwingung in einer Ebene senkrecht zu H , deren Schwingungszahl proportional ist H . Ist das Feld nicht homogen, so muß dafür gesorgt werden, daß $x, y, z - z_0$ sehr klein bleiben. Dies wird der Fall sein, wenn A klein ist, und die elektrische Ladung an eine Ebene (oder ein Flächenelement) senkrecht zu H gebunden ist; oder auch wenn quasielastische Kräfte der Form $-k^2x, -k^2y, -k^2z$, die sehr klein gegen $\frac{eH}{c} \frac{dx}{dt}, \frac{eH}{c} \frac{dy}{dt}$ sind, eingeführt werden, und schwache Erregung vorausgesetzt wird. Ist für die in Betracht kommende Bewegung das Feld nur unvollkommen homogen, so resultiert eine Verbreiterung der Schwingungszahl $v = eH/mc$ entsprechenden Spektrallinie.

Die nächstliegendste Annahme, die man über den Ursprung des Feldes H machen kann, ist wohl, es einem Molekularmagneten zuzuschreiben; diese Gebilde spielen ja in der Theorie

1) Vgl. insbesondere P. Weiss, L'hypothèse du champ moléculaire et la propriété ferromagnétique, Bull. Soc. Franc. de Physique 1907; Compt. rend. 143, p. 1136. 1906; 145. 1907. 9 et 30 décembre.

des Magnetismus eine wesentliche Rolle. Sei $\pm \mu$ die Polstärke, l die Länge des Magneten; der Symmetrie halber liege die Ladung e auf der Verlängerung desselben, im Abstand r vom nächsten Pol. Dann ist

$$\pm H = \mu \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right],$$

mithin die Schwingungszahl

$$(1) \quad \pm \nu = \frac{\mu e}{m c} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+l)^2} \right].$$

Vergleicht man diese Formel mit der Balmerschen (N =univers. Konstante)

$$(2) \quad \nu = N \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right], \quad n = 3, 4, 5 \dots,$$

mit der Rydbergschen Serienformel

$$(3) \quad \nu = N \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(n+b)^2} \right],$$

und den von mir (l. c.) gegebenen

$$(4) \quad \nu = N \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{1}{[n+a+\beta(A-\nu)]^2} \right\}, \quad A = N/a^2 = \text{Grenze der Schwingungszahlen}$$

und

$$(5) \quad \nu = N \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{\left(n+a+\frac{b}{n^2}\right)^2} \right],$$

so springt die Analogie sofort ins Auge, und ist um so bemerkenswerter, als die Gesetze der Spektralschwingungen ja so gänzlich von allem sonst Bekannten abweichen. Verfolgt man also genauer den hiermit möglich gemachten Schluß von den Serienspektren auf die Elementarmagnete, so wird man mit einigem Grund hoffen können, dadurch einen Einblick in Molekularkräfte und -struktur zu gewinnen. Allerdings kann die Zukunft erst entscheiden, ob das Bild ein allseitig zweckmäßiges ist.

Die Balmersche Formel sagt nun aus, daß die Länge l des Magneten ein Vielfaches einer bestimmten Länge sei, d. h. daß man jedes, den Linien des Wasserstoffs entsprechende Magnetfeld dadurch erhält, daß man eine Anzahl n untereinander identischer Magnete von der Länge s Pol an Pol fügt, so daß $l = ns$ ist. Eine einfachere Anordnung der

Elementarmagnete als die hiermit geforderte ist wohl kaum denkbar. Der Abstand r bleibt hierbei konstant; setzt man ihn gleich as , so folgt

$$(6) \quad v = \frac{\mu e}{s^2 m c} \left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+n)^2} \right], \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Die Schwingungszahlen nähern sich also einer Grenze für $n=\infty$, und bei der Entwicklung nach Potenzen von $1/n$ ist der Koeffizient von $1/n^2$ universell, falls die Elementarmagnete und $e/m c$ bei allen Elementen dieselben sind.

Daß der Koeffizient von $1/n^2$ universell sei, ist von Rydberg ausgesprochen worden; der Beweis dafür war erst auf Grund der sich der Erfahrung sehr genau anschließenden Formeln (4) und (5) möglich (vgl. Inaug.-Diss. des Verf. I. c.).

Die Hypothese der magnetischen Atomfelder führt also ohne Schwierigkeit zur Erklärung der Grenze der Schwingungszahlen, welche bekanntlich die Serienschwingungen so scharf gegen alle aus anderen Gebieten der Physik bekannte Schwingungen abscheidet. In der Nähe der Grenze röhrt das Feld nur noch vom ersten Pole her.

Soll endlich (6) mit der Balmerischen Formel (2) identisch werden, so hat man den noch willkürlichen Abstand as der Ladung e zum nächsten Pol gleich der doppelten Länge eines Elementarmagneten zu nehmen, also $a=2$ zu setzen.¹⁾ Diese einfache Beziehung besteht jedoch nur bei Wasserstoff, und deutet auf einen besonders einfachen Aufbau des Wasserstoffatoms aus denselben Körperteilen, die die Elementarmagnete bilden.

Die große Genauigkeit der Balmerischen Formel erfordert, daß das Coulombsche Gesetz des reziproken Quadrates der Entfernung auch in Molekularentfernungen noch strengste Gültigkeit habe.

Superponiert sich zu diesem von n abhängigen Magnetfeld H_n ein anderes H , so ergibt sich eine neue Reihe von Linien. Ist c an ein Flächenelement senkrecht zu H_n gebunden, wie oben angenommen wurde, so sind die v_n derselben gegen die vorigen um die konstante Größe $(e/m c) H \cos(\angle H H_n)$ verschoben. Liegen dagegen schwache elastische Reaktionen vor, so gilt dies nur, falls H parallel H_n ist. Es ist daher

1) Über diese Zahl 2 vgl. unten p. 667.

nach diesen Vorstellungen zu erwarten, daß *Systeme konstanter Schwingungsdifferenzen besonders häufig angetroffen werden*: dies entspricht dem Gesetz der konstanten Differenzen, welches bekanntlich auch bei Spektren gilt, in welchen Serien bis jetzt nicht gefunden worden sind.

Gibt man den ersten Elementarmagneten eine von s abweichende Länge $s + \varepsilon s$ und variiert in geeigneter Weise die Entfernung $r = a s$, so resultiert die allgemeine Rydbergsche Serienformel (3), wobei $n = 1, 2, 3 \dots$ und $b = a + \varepsilon$.

Läßt man die Entfernung von der elektrischen Ladung zum ersten Pol unverändert, und variiert die Länge des ersten Magneten, so erhält man eine neue Serie von Linien, die mit der ersten eine gemeinsame Grenze haben. Dies ist bekanntlich der Fall bei den beiden Nebenserien, und bei den Dubletts oder Triplets der Hauptserien.

Die Anzahl der Magnete muß natürlich ≥ 1 sein. Legt man der willkürlichen Zahl n der Rydbergschen Formel eine absteigende Reihe von Werten $n, n - 1, \dots$ bei, und erhält man bei n_1 einen negativen Wert der Schwingungszahl, *so wird diesem Wert keine Linie der Serie entsprechen*. Aber selbst bei einem positiven Wert kann, falls $\varepsilon > 0$ ist, die Zahl der Magnete Null sein, so daß an der berechneten Stelle keine Linie liegt. Damit ist ein sehr merkwürdiges Resultat der neueren Beobachtungen erklärt: die Linien der ersten Nebenserie, welche der Linie $n = 2$ der Balmerschen Formel entsprechen (für welche sich $v = 0$ ergibt), fallen bei den Elementen He, Cd, Zn, Hg, Tl in das bis jetzt durchforschte Gebiet, und können auf Grund der Formel (4) genau berechnet werden. Statt in dieser Gegend der Spektren Linien von besonderer Intensität zu finden, wie zu erwarten war, haben Runge und Paschen bei He¹⁾, Hermann²⁾ bei Cd, Zn, Hg, Kayser und Runge bei Tl überhaupt keine Linien wahrgenommen. Besonders auffallend ist das Beispiel von Tl, für welches die Linie sehr genau berechnet werden kann ((4) reduziert sich hier auf (3) sehr annähernd) zu $\lambda = 5417,0$. Sie sollte also in der Nähe der grünen Thalliumlinie 5351

1) C. Runge u. F. Paschen, *Astrophys. Journ.* p. 16. Jan. 1898.

2) H. Hermann, *Inaug.-Diss.* Tübingen 1904.

liegen, welche der zweiten Nebenserie angehört, und sie bei Anwendung des elektrischen Bogens an Intensität übertreffen. Aber selbst wenn diese blendend auftrat, konnte Verfasser keine Spur der gesuchten Linie wahrnehmen. Die Hypothese einer ungewöhnlich vollständigen Selbstumkehr der Linie (wofür Beispiele vorliegen) wurde dadurch geprüft, daß hinter den Bogen oder die Flamme eine Nernstlampe gestellt wurde; auf diesem kontinuierlichen Hintergrund hätte sich nun die Linie dunkel abheben müssen, was nicht der Fall war.

Gehen wir zur Interpretation der die Beobachtungen in den meisten Fällen sehr genau darstellenden Formel (4) über, so besagt dieselbe, daß bei anderen Elementen als Wasserstoff nicht nur der Abstand der schwingenden Ladung e zum nächsten Pol von Serie zu Serie variieren kann, sondern daß auch der Abstand des zweiten Poles von e (und vom ersten) kein einfaches additives Gesetz befolgt. Die Abweichung nimmt jedoch ab, wenn der Abstand von e (die Zahl n) zunimmt; sie ist proportional $A - \nu$, d. h. dem reziproken Quadrat der Entfernung von e . Diese Wechselwirkung zwischen Atom und Pol, die besonders bei höheren Atomgewichten sich fühlbar macht, muß aber ihrer Form nach als unsicher gelten, ja selbst der Schluß, daß das Feld *stets* von einem *Linearmagneten* und nur einem herrühre, kann aus der Erfahrung nicht mit Sicherheit gezogen werden, da (4) mancherlei Transformationen und Entwickelungen zuläßt, so z. B. die Reihenentwicklungen

$$(7) \quad \nu = A - \frac{N}{n^2} + \frac{B}{n^3} + \frac{C}{n^4} + \dots,$$

$$(8) \quad \nu = A - \frac{N}{(n+\alpha)^2} + \frac{C}{(n+\alpha)^4} + \dots,$$

aus welchen man schließen würde, daß unter der Einwirkung des Atoms die Verteilung des Magnetismus eine andere geworden ist. Die Serie (7) unterscheidet sich von den Formeln von Kayser und Runge, Runge und Paschen dadurch, daß der zweite Koeffizient nicht veränderlich, sondern universell ist. Bei gleicher Zahl willkürlicher Konstanten ist diese Formel den eben genannten entschieden überlegen; zu einer ersten Berechnung einer Serie ist sie andererseits viel geeigneter als (4): für die Grenze A ergibt sich überdies fast

derselbe Wert wie aus (4). Für die definitive Darstellung und die Extrapolation ist letztere Formel allerdings vorzuziehen. Dieselbe besitzt auch (wie (8)) den Vorzug, daß der niederste Wert der Ordnungszahl, für den noch eine Linie zu erwarten ist, und der durch die Analogie der Spektren zwar häufig, aber nicht immer *a priori* festgestellt werden kann, nicht bestimmt zu werden braucht: Erhöhung von n um eine Einheit kann durch Verkleinerung von α aufgehoben werden.

Es wird unten gezeigt werden, daß Längenänderungen der Elementarmagnete durchaus nicht mit Längenänderungen der Korpuskeln verbunden zu sein brauchen, für die sie das abgekürzte Symbol bilden. Auch läßt sich, durch Einführung zweier Magnete an Stelle des einen, das einfache additive Gesetz der Verbindung der Magnete aufrecht erhalten. Solange aber neue numerische Beziehungen sich aus solchen Spekulationen nicht ergeben, scheint es mir richtiger, mich auf die Betrachtung des allgemeinen Charakters der Seriengesetze zu beschränken.

Bei Wasserstoff war der Abstand auch des ersten Poles von e durch dieselben Korpuskeln bestimmt, wie der des zweiten, und es ist daher plausibel, daß die Lage des ersten Poles durch eine ähnlich gebaute Formel sich darstellen läßt als Funktion der Anzahl dieser Korpuskeln, wie die Lage des zweiten Poles, d. h. daß die Atomkräfte auf beide einen ähnlichen Einfluß haben. Damit erhalten wir die Interpretation des Satzes von Rydberg, daß Hauptserie und zweite Nebenserien durch die zwei Formeln gegeben seien:

$$\nu = N \left[\frac{1}{(1+\alpha)^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{(n+\beta)^{\frac{1}{n}}} \right] \text{ (Hauptserie),} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

$$\nu = N \left[\frac{1}{(1+\beta)^{\frac{1}{n}}} - \frac{1}{(n+\alpha)^{\frac{1}{n}}} \right] \text{ (2. Nebenserien),}$$

und die Richtigkeit der damit ausgesprochenen Beziehungen zwischen den zwei Serien hat sich auf Grund der genaueren Formeln bestätigt.¹⁾ Ob aber in diesen Formeln statt 1 auch eine willkürliche ganze Zahl m gesetzt werden darf, wie Rydberg annimmt, so daß noch eine unbegrenzte Reihe neuer

1) Vgl. Inaug.-Diss. des Verf., I. c.

Serien im Infrarot zu erwarten wäre, ist bisher unentschieden; die Zahl 2 der Balmerschen Formel kann ebensogut durch den Bau des Atoms aus den besprochenen Korpuskeln bedingt sein, wie sie auch als Spezialfall einer willkürlichen ganzen Zahl aufgefaßt werden kann: denn für 3, 4, 5 . . . an Stelle von 2 erhält man voraussichtlich wesentlich schwächere Linien, die im Infrarot liegen, während für 1 sich Schuhmannsche Strahlen ergeben. Allerdings entspricht der Formel

$$\nu = N \left[1 - \frac{1}{2^2} \right]$$

eine der intensivsten Linien des von Lyman¹⁾ neuerdings ausgemessenen, extrem-ultravioletten Wasserstoffspektrums: $\lambda_{\text{ber.}} = 1215,3$; $\lambda_{\text{beob.}} = 1216,0$ (in der vorläufigen Mitteilung $\lambda = 1215,6$). Die nächste Linie der Serie $\lambda = 1025,7$ liegt an der Grenze des beobachteten Bereichs; die letzte von Lyman wahrgenommene Linie ist 1033, so daß 1025, wenn überhaupt vorhanden, nicht intensiv sein kann. Die Zuordnung bleibt daher unsicher. Ebensowenig verlangt die vorgetragene Theorie, daß jeder Nebenserien eine Hauptserie entspreche.

Es entsteht nun die Frage, ob sich dieses Schema der Linearmagnete nicht etwa in Widerspruch befindet zur Elektronentheorie, welche den Magnetismus aus der Bewegung der Elektronen abzuleiten sucht, und von der Hypothese magnetischer Massen absieht. Hierbei kommen vor allem in Betracht zirkulierende Bewegungen der elektrischen Ladungen, insbesondere innerhalb des Atoms und gleichförmige Drehung elektrischer Rotationskörper um ihre Achse.²⁾

Was zunächst die ersteren betrifft, so ist nicht anzunehmen, daß sie merkliche Kräfte auf das schwingende Elektron ausüben. Denn — und hierauf hat Lord Rayleigh³⁾ aufmerksam gemacht — die Feinheit mancher Spektrallinien ist eine so große, daß sie eine außerordentliche Stabilität des

1) Th. Lyman, *Astrophys. Journ.* 19. p. 263. 1904; 23. p. 181. 1906.

2) W. Voigt, *Ann. d. Phys.* 9. p. 115. 1902.

3) Lord Rayleigh, *Phil. Mag.* (6) 11. p. 123. 1906; vgl. auch Jeans, *Phil. Mag.* (6) 2. p. 421; 11. p. 604.

Systems und eine Unveränderlichkeit der wirkenden Kräfte unter allen möglichen Bedingungen verlangt, die mit zirkulierenden Bewegungen der Elektronen schwer vereinbar erscheinen. Nimmt man etwa kreisförmige Bewegungen an, so müßten Radius, relative Lage der Bahn und Geschwindigkeit bei allen Atomen eines Elementes auf mindestens $1/1000000$ ihres Betrages (bei sehr feinen Linien) dieselben sein und dauernd bleiben, und dabei die Zahl der Teilchen genügend groß sein, um den Linienreichtum mancher Spektren zu erklären. Man wird solchen Bewegungen wohl eher nur einen schwachen perturbierenden, die Linie mehr oder weniger verbreiternden Einfluß zuschreiben.

Leichter verständlich ist eine sehr angenäherte relative Unveränderlichkeit der Drehgeschwindigkeit von Rotationskörpern, wenn diese als sehr groß vorausgesetzt wird: diese Drehung bedingt überdies, im Gegensatz zu der zirkulierenden Bewegung, *keine Ausstrahlung*.

Setzt man Oberflächenladung voraus, so gilt zunächst der Satz, daß man für jeden um seine Achse sich gleichförmig drehenden Rotationskörper die Elektrizität in der Weise auf der Oberfläche verteilen kann, daß derselbe im ganzen Außenraum einem Linearmagneten äquivalent wird, dessen Pole P_1, P_2 im Innern des Körpers auf dessen Achse eine vorgeschriebene Lage haben, und daß die magnetische Kraft im Innern des Körpers endlich und stetig bleibt. Denn in diesem Falle existiert im ganzen Raum ein magnetisches Potential Ψ , welches überall der Gleichung $\Delta \Psi = 0$ genügt, und im Außenraum die Form hat

$$\Psi_a(x, y, z) = k \left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right],$$

wo r_1, r_2 die Abstände von (x, y, z) zu den im Innern des Körpers gegebenen Polen P_1, P_2 sind. Beim Durchgang durch die Fläche ist H unstetig. Durch Integration der Gleichungen

$$\text{curl } H = \frac{4\pi\sigma v}{c}; \quad \text{div } H = 0$$

über ein an der Oberfläche gelegenes, geeignet geformtes Volumelement und Grenzübergang findet man, daß der Sprung von H durch einen in der Fläche senkrecht zur Geschwindigkeit v liegenden Vektor von der Größe $4\pi\sigma v/c$ dargestellt

wird (σ = Oberflächendichte). Derselbe liegt somit in der Meridianebebene, und man hat, unter n_a , n_i die äußere und innere Normale verstanden, unter ds ein Linienelement des Meridians:

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n_i} + \frac{\partial \Psi_a}{\partial n_a} = 0; \quad \frac{\partial \Psi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Psi_a}{\partial s} = \frac{4\pi\sigma n}{c} = \frac{4\pi\sigma\omega R}{c},$$

wo R der Abstand von der Achse, ω die Drehgeschwindigkeit ist. Aus diesen Bedingungen bestimmt sich Ψ_i bis auf eine additive Konstante. Sei nämlich $\Gamma(x, y, z, a, b, c)$ die zweite Greensche Funktion, welche also in bezug auf x, y, z den Bedingungen

$$\Delta \Gamma = 0, \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial n} = -\frac{4\pi}{F}$$

(F = Oberfläche) genügt, und im Punkte (a, b, c) unendlich wird wie

$$-[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-1/2}.$$

Seien $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ die Koordinaten von P_1 und P_2 . Wird $\Psi_i = \frac{K}{r_1} - \frac{K}{r_2} + K\Gamma(x, y, z, a_1, b_1, c_1) - K\Gamma(x, y, z, a_2, b_2, c_2) + \text{konst.}$ gesetzt, so erfüllt diese Funktion die gegebenen Bedingungen und bleibt im Innern stetig und endlich; es gibt also, vom Vorzeichen abgesehen, die Formel

$$(9) \quad \frac{4\pi\sigma\omega R}{cK} = \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial s}(x, y, z, a_1, b_1, c_1) - \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial s}(x, y, z, a_2, b_2, c_2)$$

die verlangte Oberflächendichte.

Für die Kugel sei P_1, P_2 als x -Achse gewählt, und der Ursprung der Koordinaten im Mittelpunkt. Dann ist¹⁾, bis auf eine additive Konstante:

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}(x, a_1) &= \frac{1}{a} \log [a^2 - a_1 x + a \sqrt{a^2 - 2a_1 x + a_1^2}] \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{a^2 - 2a_1 x + a_1^2}} = \frac{1}{a} \log [a^2 - 2a_1 x + ar_1] - \frac{2}{r_1} \end{aligned}$$

und da $dx/ds = R/a$, so ergibt sich

$$(10) \quad \frac{4\pi\sigma(x)\omega a}{cK} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{a} \log \frac{a^2 - a_1 x + ar_1}{a^2 - a_2 x + ar_2} - \frac{2}{r_1} + \frac{2}{r_2} \right\}.$$

1) F. Neumann, Potential- und Kugelfunktionen, Leipzig 1887. p. 272; H. Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik 1. p. 457. Braunschweig 1900.

Die in (7) und (8) gegebenen Formeln würde man durch eine Verteilung der Elektrizität interpretieren können, die von der oben angegebenen mehr oder weniger abweicht. So ist z. B. das Feld eines Zylinders, der durch Juxtaposition von n identischen Zylindern entsteht, durch eine Reihe von der Form (8) gegeben, falls die Dichte σ konstant ist. Entspricht σ aber der Formel (9), so fallen die höheren Glieder der Entwicklung weg, der Zylinder ist einem Linearmagneten streng äquivalent, was vorher nur angenähert der Fall war.

Dabei können die Pole beliebig nahe den Endflächen des Zylinders bzw. den Endpunkten der Achse liegen; es wird dann die Dichte σ an diesen Punkten sehr groß; in bezug auf seine elektrostatische Anziehung verhält sich der Körper nahezu als ob seine Ladung in P_1 und P_2 konzentriert wäre. (Im Grenzfall wird σ unendlich wie die dritte Potenz der reziproken Entfernung von der Achse: dieser Fall ist daher auszuschließen.)

Reiht man eine Anzahl derartiger, untereinander identischer Rotationskörper mit abwechselnd entgegengesetzter Ladung und Rotation und gemeinsamer Achse aneinander, so ergibt sich ein sehr stabiles System, welches einem Magneten von der n fachen Länge der einzelnen Körper beliebig nahe äquivalent ist.

Im Falle der Balmerschen Formel hat man sich an den Endpunkt des so konstruierten Magneten zwei ebensolche Rotationskörper angereiht zu denken, die aber entweder ungeladen sind, oder keine Drehgeschwindigkeit besitzen. Nimmt man das letztere an und berücksichtigt, daß die elektrische Ladung, wie vorausgesetzt, nahezu auf zwei Punktladungen sich reduziert, so kann man beim letzten Körper der Reihe die eine dieser Ladungen mit der früher angenommenen oszillierenden Punktladung e identifizieren, während die andere durch die ihr sehr naheliegende entgegengesetzte Ladung des nächsten Körpers sehr kräftig angezogen wird, und einen festen Drehpunkt für die Oszillationen darstellt.¹⁾ Voraus-

1) Es hätte dann an Stelle von e/m eine andere Größe zu treten, in der m ein elektromagnetisches Trägheitsmoment, e eine ähnlich gebaute Größe bedeutet. Dies ändert nichts Wesentliches in den Darlegungen.

setzung ist allerdings, daß die übrigen Ladungen des Atoms keine der Verschiebung des Endpunktes aus der Ruhelage proportionale, merkliche Kraft ausüben.

An diese besonders einfache Interpretation der Balmer-schen Formel kann man versuchen, eine Hypothese über den, in den meisten Fällen nicht unbedeutenden Unterschied im Charakter der beiden Nebenserien und ihre gegenseitige Beziehung zu knüpfen. Bei Wasserstoff hat bekanntlich Pickering die zweite Nebenserie in den Spektren gewisser Sterne entdeckt, und ihre Gleichung lautet

$$r = N \left[\frac{1}{2^2} - \frac{1}{(n + \frac{1}{2})^2} \right], \quad n = 2, 3 \dots,$$

so daß man die Balmersche Serie als den geraden, die Pickering'sche als den ungeraden Ordnungszahlen einer einzigen Serie entsprechend betrachten kann. Man wird es nun als plausibel betrachten dürfen, daß in unserem Modell, wo negative und positive Ladungen abwechseln, die geraden und die ungeraden Ordnungszahlen in der Tat einen verschiedenen physikalischen Charakter der Linien bedingen können, und daß die Abtrennung zweier Körper, die dann ein neutrales System bilden, andere Energieformen erfordert als die eines einzigen Körpers. Besitzt das Atom eine negative Ladung, und hat z. B. unser System bei der Ordnungszahl n ebenfalls eine resultierende negative Ladung, so wird bei den Ordnungszahlen $n+1, n-1$, die Gesamtladung des Atoms kleiner sein oder sogar ihr Vorzeichen ändern. Bei höheren Atomgewichten können, wie oben gezeigt wurde, die übrigen im Atom anwesenden Ladungen die Verteilung der Elektrizität auf unserer Reihe von Rotationskörpern modifizieren. Veränderung des Vorzeichens der Gesamtladung derselben wird daher von Einfluß sein, so daß für gerade und ungerade n , d. h. für erste und zweite Nebenserie, die Abweichung von der Wasserstoffformel verschieden sein können. Bei den Alkalien ist, ganz im Sinne dieser Darlegung, das Vorzeichen dieser Abweichung bei den beiden Nebenserien ein entgegengesetztes.

Ich habe nicht geglaubt, diese Betrachtungen unterdrücken zu müssen, so sehr sie auch unsicher sind. In einem Gebiet, in welchem alle Ansätze fehlen, können auch solche Analogien von Wert sein.

Es sei noch bemerkt, daß man aus bekannten Sätzen leicht ableitet, daß, wenn die Ladung einer Kugel aus homogenen, konzentrischen Schichten besteht, und sie unter dem Einfluß irgend eines stationären, inhomogenen Magnetfeldes Translationsschwingungen ausführt (bei welchen die Geschwindigkeit in allen Punkten der Kugel dieselbe ist), die *Bewegung so vor sich geht, als ob die gesamte Ladung der Kugel in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre.*

Prinzipiell wenigstens dürfte also vom Standpunkt der Elektronentheorie gegen die gemachten Annahmen nicht viel einzuwenden sein. Allerdings ist die geforderte Verteilung der Elektrizität keine einfache. Ob sich aber bei den Molekularkräften die einfachen Gesetze auf die elektrische Dichte beziehen, oder auf die wirkenden Kräfte, ist uns a priori gänzlich unbekannt. Letztere erscheinen hier, der Riemannschen Auffassung der Funktionentheorie entsprechend, in einfachster Weise durch ihre Singularitäten (die Pole der Magnete) definiert: auf die Form der Funktion in deren Nähe, und auf die räumliche Anordnung derselben beziehen sich die einfachen Gesetze, die übrigens, soweit ihre Abhängigkeit von Raum und Zeit in Betracht kommt, ja vollständig mit bekannten Gesetzen übereinstimmen. Und, da eine vollständige Theorie der Linienspektra ohne ganz spezielle Annahmen über den Bau der Atome nicht möglich scheint, dürfte es wohl vom erkenntnistheoretischen Standpunkt ein Vorzug eher als ein Nachteil dieser Hypothese sein, daß sie über die *Gestalt* der Elemente, aus denen die Atome aufgebaut gedacht werden, keine Annahme zu machen braucht, sondern nur mit als starr gedachten Strecken oder Entfernungen operiert. Im übrigen wird man bei einer Frage dieser Art, bei welcher ein zwingender Schluß von der Wirkung auf die Ursache kaum möglich scheint, und einerseits die beobachteten Tatsachen prinzipiell so sehr von allen bekannten Erscheinungen abweichen, und so kompliziert sind, andererseits über die vorauszusetzenden Grundlagen so große Unsicherheit herrscht, wohl kaum erwarten dürfen, daß ein *in jeder Beziehung befriedigender Anschluß* an unsere gewohnten Vorstellungskreise möglich sei — ja, es dürfte schwer fallen, über das, was in diesem Falle als „*befriedigende Erklärung*“ zu betrachten sei, sich zu einigen.

Über den allgemeinen Charakter einer etwa noch zu findenden exakten Serienformel ist noch folgende Bemerkung zu machen. Die Berechnung vieler Spektren läßt kleine Unstetigkeiten im Verlauf der Serienkurve erkennen, die die Beobachtungsfehler überschreiten und zeigen, daß die *allgemeine* exakte Serienformel nicht einfach sein kann. Besonders auffallend und schon von Kayser und Runge hervorgehoben sind die Tl-Linien $\lambda = 2665,67$ und $2267,13$, die ein Paar der zweiten Nebenserien bilden und dieselbe Differenz der Schwingungszahlen ergeben wie die anderen Paare, und überdies von Exner und Haschek ebenfalls gemessen sind, so daß der Fehler nur einige Hundertstel Ångström betragen kann. Die Formel (4) gibt für die Linien dieser Serie die Fehler¹⁾ (in Å.E.)

$$\begin{aligned} & 0,00; -0,12; +0,14; -1,14; -0,02; -0,03; \\ & 0,00; +0,08; -0,21; -0,07; -0,01; +0,07; -0,23. \end{aligned}$$

Die Linie 2665 fällt ganz aus der Serie heraus, was besonders auffallend ist, wenn man die Größe

$$\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A-\nu}} = m + \alpha + \beta(A - \nu)$$

bildet. Die Größe dieses Fehlers ist auch bei Anwendung anderer Formeln ungefähr dieselbe. So berechnen Kayser und Runge die Konstanten ihrer Formel aus den weiteren Linien (ohne Berücksichtigung der vier ersten) und finden die Fehler:

$$\begin{aligned} & -1,69; +0,01; +0,04; +0,01; +0,08; -0,21; \\ & -0,03; +0,07; +0,22; -0,01. \end{aligned}$$

Endlich, wenn man die Konstanten von

$$\lambda = a + b/m^3 + c/m^4$$

(statt $1/\lambda = \dots$) aus den nächsten Linien berechnet, ergibt sich:

$$0,00; 0,00; -1,60; 0,00; \dots$$

Bei 2665 hat also die Serienkurve einen Knick.

Auf Bandenspektren sind diese Theorien nicht anwendbar. Ich möchte mich in dieser Hinsicht auf die Bemerkung beschränken, daß man sie vielleicht geschlossenen Ringen oder

1) Vgl. Inaug.-Diss. des Verf., I. c. p. 299.

Polygonen, aus den betrachteten Elementarmagneten bestehend, zuschreiben könnte, in der Annahme, daß solche Gebilde eine wichtige Rolle im Bau des Atoms spielen, und daß sie durch die lichterregenden elektrischen oder chemischen Vorgänge erst gesprengt werden müssen, bevor ein Serienspektrum zu-stande kommen kann.

Der hier vorgetragenen Vorstellungsweise kann man den Vorwurf machen, daß sie die willkürliche, in den Serienformeln auftretende ganze Zahl n durch eine Art magnetischer Polymerisation einführt, während die mechanischen oder elektrischen Eigenschwingungen eines stetig ausgebreiteten Körpers durch ihre Knotenlinien und -flächen diese Zahl in einfacherer Weise einzuführen gestatten. Dieser größeren Einfachheit steht jedoch die Schwierigkeit gegenüber, daß im allgemeinen, wenn die Wellenlänge groß ist gegen die Dimensionen des Erregers, eine merkliche Ausstrahlung der Oberschwingungen nicht zustande kommt eben wegen der Knotenflächen¹⁾, so daß auch hier neue Hypothesen nötig werden. In diesem Zusammenhang sei noch auf ein wichtiges Experiment von Wood²⁾ hingewiesen. Wird Natriumdampf mit weißem Licht bestrahlt, so erscheint ein ziemlich linienreiches Bandenspektrum als Fluoreszenzlicht. Benutzt man dagegen monochromatisches Licht, dessen λ einer der Linien dieses Bandenspektrums sehr nahe entspricht, so wird durch Resonanz nicht nur diese Linie, sondern auch eine Reihe anderer, mit ihr durch einfache numerische Gesetze verknüpfter, erregt; dieselben gehören offenbar dem gleichen schwingenden System an. Man kann hierin eine Wirkung der ungeordneten Molekularbewegung erblicken die, wenn auch unfähig, die nötige kinetische Energie hervorzubringen, doch eine gleichmäßige Verteilung derselben über die verschiedenen Freiheitsgrade — hier Schwingungszustände — hervorzubringen bestrebt ist. Bringt man etwa den Grundton einer Saite durch Resonanz hervor, und berührt dann dieselbe (ohne Anschlag) in der Mitte, so werden Ober-töne entstehen. Als nun Hr. Wood den Na-Dampf mit gelbem Na-Licht bestrahlte, erhielt er ein intensives, aus den *D*-Linien

1) Vgl. Dissertation, Anhang.

2) R. W. Wood, Physik. Zeitschr. 7. p. 878. 1906.

bestehendes Fluoreszenzlicht; doch erschien keine Spur des nächsten Paars der Hauptserie, zu welcher die *D*-Linien gehören, trotzdem dasselbe sonst eine große Intensität besitzt. Man wäre, im Sinne der eben angestellten Überlegung, geneigt, daraus zu schließen, daß die beiden Paare nicht von demselben schwingenden System ausgesandt werden, so daß ein Ausgleich der Energie nicht stattfinden kann. Bei Annahme der Elementarmagnete ist dem tatsächlich so. Wenn auch die Überlegung unsicher, und ein einzelnes Experiment ungenügend sein dürfte, so scheint mir der Hinweis doch nützlich, daß hier möglicherweise ein Ansatz zur experimentellen Prüfung der Frage vorliegt.

Der Zeeman-Effekt.

Eine wichtige Anforderung an jede Theorie der Linienspektren ist die Erklärung der mehr oder weniger komplizierten Zerlegungen der Linien im magnetischen Feld. Ein einigermaßen befriedigendes Bild dieser Erscheinung und ihrer Gesetze auf Grund der Lorentzschen Annahme der komplexen Elektronen zu gewinnen ist bisher nicht gelungen. Ich werde nun zeigen, daß die bisher entwickelten Anschauungen in der Tat zu einer großen Mannigfaltigkeit mehr oder weniger komplizierter Zerlegungen führen, deren allgemeiner Charakter durchaus der Beobachtung entspricht. Doch auch hier muß ich mich damit begnügen, einen Zusammenhang mit wohlbekannten Tatsachen und Problemen nachzuweisen. Es ist in diesem Gebiet des Unbekannten zu viel, als daß von der Theorie zunächst mehr als eine solche Reduktion des Problems verlangt werden dürfte.

Daß die Ersetzung quasielastischer Kräfte durch molekularmagnetische eine wesentliche Änderung im Zeeman-Effekt bedingt, ist ohne weiteres klar: gelänge es, das Molekularfeld H_0 dauernd parallel dem äußeren Feld H zu stellen, so würde einfach statt

$$\nu = \frac{e H_0}{m c} \quad \text{resultieren:} \quad \nu = \frac{e (H_0 + H)}{m c}.$$

Die Spektrallinie, in Richtung der Kraftlinien gesehen, erschien zirkularpolarisiert und um die Größe $e H / m c$ aus ihrer früheren Lage verschoben, und zwar nach links oder rechts,

je nachdem H und H_0 gleich- oder entgegengesetzt gerichtet sind. Sind beide Fälle in der Lichtquelle gleich häufig, so ergibt sich ein Dublett; der Polarisationszustand, in beliebiger Richtung beobachtet, ist derselbe wie bei Lorentz aber die Longitudinalkomponente fehlt, und die Zerlegung ist, für einen und denselben Wert von e/m , *doppelt so groß* wie bei Lorentz.¹⁾

Infolge der molekularen Agitation wird jedoch im allgemeinen der Träger der Serienspektren im Magnetfeld Bewegungen ausführen, welche die Erscheinung wesentlich ändern; Hr. Voigt²⁾ hat gezeigt, daß, falls nicht Kräfte herangezogen werden, die einer Reibung äquivalent sind, keinerlei Tendenz zur Orientierung rotierender Ladungen im Magnetfeld besteht. Wir setzen dabei voraus, daß diese Rotationsbewegungen analog den in der Mechanik starrer Körper behandelten Fällen der freien Bewegung um einen festen Punkt oder um den Schwerpunkt, der Kreiselbewegung, des Pendels usw. durch gewisse Periodizitätseigenschaften ausgezeichnet seien.

Nach unseren Voraussetzungen führt die Ladung e unter dem Einfluß von H_0 Oszillationen von sehr kleiner Amplitude aus, und ist an ein Flächenelement $\perp H_0$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, an eine Ebene $\perp H_0$ gebunden.³⁾ Die z -Achse eines festen Systems (O, x, y, z) sei parallel H ; von der $+z$ -Achse aus betrachtet möge die $+y$ -Achse durch eine Drehung im Sinne des Uhrzeigers mit der $+x$ -Achse zur Drehung gebracht werden können. Seien ϑ der Winkel von H_0 und H ; $\psi - \pi/2$ der Winkel der Ebenen Oxz und OH_0z , also die Polarkoordinaten der veränderlichen Richtung H_0 ; so sind deren Richtungskosinus

$$\sin \vartheta \sin \psi, \quad -\sin \vartheta \cos \psi, \quad \cos \vartheta.$$

Bei gegebener Lage und Bewegung von H_0 sind ϑ, ψ gegebene Funktionen der Zeit. Man setze

$$(11) \begin{cases} x = u \cos \psi - v \cos \vartheta \sin \psi; & y = u \sin \psi + v \cos \vartheta \cos \psi; \\ & z = v \sin \vartheta, \end{cases}$$

1) Vielleicht gehören hierher die Beobachtungen von Wood bei Quecksilberdampf und Na-Dampf (Physik. Zeitschr. 9. p. 125. 1908).

2) W. Voigt, Ann. d. Phys. 9. p. 115. 1902.

3) Diese Bedingung kann durch andere ersetzt werden; wesentlich ist nur, daß die Ladung e ihre relative Lage zu den Elementarmagneten nicht merklich ändere.

so kann man u, v als Lagrangesche Koordinaten des Teilchens e auf der Ebene $\perp H_0$ betrachten. Die kinetische Energie von e ist

$$T = \frac{m}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + 2 \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta \left[u \frac{dv}{dt} - v \frac{du}{dt} \right] \right. \\ \left. + (u^2 + v^2) \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \left[v \frac{d\vartheta}{dt} - u \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt} \right]^2 \right\}.$$

Die Berechnung der virtuellen Arbeit der magnetischen Kräfte wird vereinfacht durch den Umstand, daß in einem ruhenden Koordinatensystem dieselbe identisch verschwinden muß, wenn $\delta u, \delta v$ durch $du/dt, dv/dt$ ersetzt werden. Man findet

$$\delta A = \frac{e}{c} (H_0 + H \cos \vartheta) \left(\frac{du}{dt} \delta v - \frac{dv}{dt} \delta u \right) \\ - \frac{d\psi}{dt} (H_0 \cos \vartheta + H) (u \delta v + v \delta u) + v \frac{d\psi}{dt} H \sin^2 \vartheta \delta v + v \frac{d\vartheta}{dt} H \sin \vartheta \delta u.$$

Daraus folgen die Lagrangeschen Gleichungen

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 u}{dt^2} - 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{dv}{dt} \cos \vartheta - v \cos \vartheta \frac{d^2 \psi}{dt^2} \\ \qquad \qquad \qquad + 2 v \frac{d\psi}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta - u \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \\ = \frac{e}{mc} \left\{ - (H_0 + H \cos \vartheta) \frac{dv}{dt} - \frac{d\psi}{dt} u (H_0 \cos \vartheta + H) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + v H \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} \right\}, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} \cos \vartheta + u \cos \vartheta \frac{d^2 \psi}{dt^2} \\ \qquad \qquad \qquad - 2 u \frac{d\psi}{dt} \frac{d\vartheta}{dt} \sin \vartheta - v \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \cos^2 \vartheta + v \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \\ = \frac{e}{mc} \left\{ (H_0 + H \cos \vartheta) \frac{du}{dt} - \frac{d\psi}{dt} v (H_0 \cos \vartheta + H) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + v H \frac{d\psi}{dt} \sin^2 \vartheta \right\}. \end{array} \right.$$

Sind $H, d\psi/dt, d\vartheta/dt$ gleich Null, so ergibt sich die ungestörte Linie:

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = - \frac{e H_0}{mc} \frac{dv}{dt}; \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = + \frac{e H_0}{mc} \frac{du}{dt},$$

$$u = u_0 + A \cos \nu_0(t - t_0); \quad v = v_0 + A \sin \nu_0(t - t_0); \quad \nu_0 = \frac{e H_0}{mc}.$$

Im Zeeman-Effekt ist die relative Perturbation der Schwingungszahl sehr klein; bei Feldern von 10000 bis 40000 Gauss ist H/H_0 von der Größenordnung 10^{-4} . Wir vernachlässigen Größen von der Ordnung $(H/H_0)^2$ sowohl in den Amplituden wie

in den Schwingungszahlen. Wir setzen ferner voraus, daß die gegebenen Funktionen der Zeit $\sin \psi, \cos \psi, \sin \vartheta, \cos \vartheta$ sich durch rasche konvergente Entwickelungen der Form

$$A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} [A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t]$$

darstellen lassen (die im Spezialfall einer periodischen Bewegung in Fourier-Reihen übergehen). Die ω_i seien proportional H_1 und (für die in Betracht kommenden ersten Glieder) mögen sich zur ungestörten Schwingungszahl v_0 verhalten ungefähr wie H zu H_0 . Während jede Differentiation von u und v einen Faktor von der Größenordnung v_0 einführt, wie aus der angenäherten Lösung (13) hervorgeht, führt die Differentiation von $\cos \psi, \dots$ nur solche von der Ordnung ω_i ein, so daß z. B. $u(d^2\psi/dt^2)\sin \psi$ zweiter Ordnung gegen $(d^2u/dt^2)\cos \psi$ ist. Beschränken wir uns auf die erste Ordnung, so reduzieren sich also die Gleichungen (12) auf

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = 2 \frac{d\psi}{dt} \frac{dv}{dt} \cos \vartheta - \frac{e}{mc} (H_0 + H \cos \vartheta) \frac{dv}{dt} \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{H_0 e}{mc} \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta u, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = -2 \frac{d\psi}{dt} \frac{du}{dt} \cos \vartheta + \frac{e}{mc} (H_0 + H \cos \vartheta) \frac{du}{dt} \\ \qquad \qquad \qquad - \frac{H_0 e}{mc} \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta v. \end{cases}$$

Sind zunächst $d\psi/dt, \vartheta$ konstant (reguläre Präzession), so ergibt sich die Lösung

$$u = A_1 \cos v_1(t - t_1) + A_2 \cos v_2(t - t_2);$$

$$v = A_1 \sin v_1(t - t_1) + A_2 \sin v_2(t - t_2),$$

wo A_1, A_2, t_1, t_2 willkürlich, und v_1, v_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$v^2 - v \left[v_0 + \left(\frac{eH}{mc} - 2 \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \vartheta \right] - \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta = 0,$$

also, bis auf Glieder zweiter Ordnung,

$$v_1 = v_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \vartheta; \quad v_2 = \frac{d\psi}{dt} \cos \vartheta,$$

Der Wurzel v_2 entsprechen also Strahlen, deren Wellenlänge 10^4 mal größer ist als die in Betracht kommenden. Wir haben also nur die erste Wurzel zu berücksichtigen.

Sei nun allgemein, bei veränderlichen ϑ , $d\psi/dt$:

$$Q = \int_{t_0}^t \left[v_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \vartheta \right] dt,$$

so ist

$$u = \frac{A \cos Q}{v_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \vartheta}; \quad v = \frac{A \sin Q}{v_0 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt} \right) \cos \vartheta}.$$

Denn durch Einsetzen in die Differentialgleichungen (14) oder (12) erkennt man, daß die Glieder bis zur zweiten Ordnung sich aufheben, so daß die Gleichungen innerhalb des vorgeschriebenen Annäherungsgrades erfüllt sind.

Diese Werte von u , v sind in (11) einzutragen, und die sich ergebenden Ausdrücke für x , y , z in Summen rein periodischer Funktionen aufzulösen. Dabei kann man $A = v_0$ setzen, und den Faktor

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{eH}{mc} - \frac{d\psi}{dt} \right) \frac{\cos \vartheta}{v_0}}$$

weglassen, da er von der Einheit nur um Größen von der Ordnung 10^{-4} abweicht. Denn durch Hinzufügen dieses Faktors werden die Amplituden der einzelnen Glieder der Entwicklung von $\sin Q$, $\cos Q$ nicht in merklicher Weise beeinflußt; andererseits erhalten etwaige durch den Faktor neu hinzukommende trigonometrische Glieder die Amplitude 10^{-4} , mithin sind die entsprechenden Intensitäten 10^{-8} mal kleiner als die der schon vorhandenen Glieder.

Wir betrachten zunächst den Fall, daß H_0 senkrecht zu H steht und sich mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um diese Achse dreht. Es ist dann

$$\psi = \omega(t - t_0); \quad \cos \vartheta = 0,$$

$$x = \cos v_0(t - t_0) \cos \psi = \frac{1}{2} \cos [(v_0 + \omega)t + c] \\ + \frac{1}{2} \cos [(v_0 - \omega)t + c'],$$

$$y = \cos v_0(t - t_0) \sin \psi = \frac{1}{2} \sin [(v_0 + \omega)t + c] \\ - \frac{1}{2} \sin [(v_0 - \omega)t + c'],$$

$$z = \sin v_0(t - t_0),$$

wobei c , c' Phasenkonstanten sind, auf die es nicht weiter ankommt.

Die Linie v_0 spaltet sich also auf in ein Triplet, dessen Gesamtbreite in der Skala der Schwingungszahlen 2ω ist, und dessen Intensitäten und Polarisationen im übrigen genau denen entsprechen, die sich in der elementaren Lorentzschen Theorie ergeben.

Soll der Drehungssinn des Lichtes mit demjenigen übereinstimmen, welchen die Erfahrung ergibt, so ist es hier nicht, wie bei Lorentz, nötig, daß das Teilchen e negativ geladen sei; vielmehr ist es notwendig und hinreichend, daß die Drehung der Achse H_0 um H in dem Sinne erfolgt, in welchem freie Elektronen im betreffenden Feld H rotieren würden. Ist endlich die Drehgeschwindigkeit ω gleich der der Elektronen, so ergibt sich ein Triplet mit doppelt so großem Komponentenabstand, wie nach der Lorentzschen Theorie zu erwarten wäre. Das Triplet Zn 4680, Cd 4678 der zweiten Nebenserien und ihre Homologen zeigen in der Tat ungefähr diesen Abstand.

Man erkennt an diesem Beispiel, daß durch die Hypothese der Molekularmagnete die Interpretation des Zeeman-Effektes wesentlich verändert wird.

Ich gehe zur allgemeinen Annahme über, es sei die Bewegung von H_0 eine periodische, so daß

$$\begin{aligned}\cos \vartheta &= a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \dots, \\ \psi &= \psi_0 + \omega' t + \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos 2\omega t \\ &\quad + \beta_2 \sin 2\omega t + \dots = \psi_0 + \omega' t + \Sigma.\end{aligned}$$

Es müssen ω, ω' in rationalem Verhältnis stehen, damit die Bewegung eine periodische sei. Soll ω die Periode sein, so muß ω' ein Vielfaches von ω sein.

Die Fourierschen Reihen für $\sin \vartheta$, $\cos \psi$, $\sin \psi$ erhält man dann durch Entwicklung nach Potenzen und Umrechnung von \cos^n , \sin^n auf \cos , \sin der Vielfachen des Winkels. Verstehen wir unter Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 , Σ Summen trigonometrischer Funktionen (die letzte ohne konstantes Glied), so ist

$$\sin \vartheta = \sqrt{1 - \cos^2 \vartheta} = 1 - \frac{\cos^2 \vartheta}{2} - \frac{\cos^4 \vartheta}{8} + \dots = \Sigma_3,$$

$$\begin{aligned}\sin(\psi - \psi_0) &= \sin \omega' t \cos \Sigma + \cos \omega' t \sin \Sigma \\ &= \sin \omega' t \left[1 - \frac{\Sigma^2}{1 \cdot 2} + \frac{\Sigma^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \dots \right] \\ &\quad + \cos \omega' t \left[\frac{\Sigma}{1} - \frac{\Sigma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right] \\ &= \sin \omega' t \cdot \Sigma_1 + \cos \omega' t \cdot \Sigma_2.\end{aligned}$$

Da Σ zwischen zwei Werten hin und her schwankt, konvergieren die Reihen.

Q ist dann von der Form

$$Q = \left\{ \nu_0 + \sum_1^{\infty} \omega n [\alpha_n b_n - \beta_n a_n] + a_0 \left(\frac{e H_0}{m c} - \omega' \right) \right\} [t - t_0] + S \\ = (\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) + S,$$

wo

$$(15) \quad \varepsilon = a_0 \left(\frac{e H_0}{m c} - \omega' \right) + \sum_1^{\infty} \omega n [\alpha_n b_n - \beta_n a_n],$$

so daß

$$u = \cos(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \cos S - \sin(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \sin S,$$

$$v = \sin(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \cos S + \cos(\nu_0 + \varepsilon)(t - t_0) \sin S$$

sich als Summen von Gliedern der Form

$$\begin{aligned} & \cos \{\nu_0 + \varepsilon \pm m \omega\} [t - t_0], \quad m = 0, 1, 2 \dots \\ & \sin \end{aligned}$$

darstellen lassen. Gleiches gilt von der parallel H schwingenden Komponente

$$z = v \sin \vartheta.$$

Dieselbe wird also in ein Spektrum mit den Schwingungszahlen

$$\nu_0 + \varepsilon \pm m \omega, \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

zerlegt. Von diesen Linien gelangt aber selbst bei mäßig rascher Konvergenz der Reihen, wie unten an Beispielen erörtert werden soll, nur eine sehr beschränkte Anzahl zur Wahrnehmung, weil die Intensitäten, die ja den Quadraten der Amplituden proportional sind, viel rascher abfallen als diese.

Man hat ferner

$$\begin{aligned} x &= \cos \omega' t [u \cos \Sigma - v \sin \Sigma \cos \vartheta] \\ &\quad - \sin \omega' t [u \sin \Sigma + v \cos \vartheta \cos \Sigma], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \sin \omega' t [u \cos \Sigma - v \sin \Sigma \cos \vartheta] \\ &\quad + \cos \omega' t [u \sin \Sigma + v \cos \vartheta \cos \Sigma], \end{aligned}$$

$$\Sigma = \alpha_1 \cos \omega t + \beta_1 \sin \omega t + \alpha_2 \cos 2 \omega t + \beta_2 \sin 2 \omega t + \dots$$

Die Klammern sind wieder in trigonometrische Summen der oben genannten Form entwickelbar; jedem Gliede

$$A \cos \nu_m t + B \sin \nu_m t,$$

$$\nu_m = \nu_0 + \varepsilon + m \omega \quad [m = 0, \pm 1, \pm 2 \dots]$$

der ersten Klammer und

$$A' \cos \nu_m t + B' \sin \nu_m t$$

der zweiten entsprechen zwei entgegengesetzt zirkularpolarisierte Wellen mit den Schwingungszahlen

$$\nu_m + \omega', \quad \text{Intensität } \left(\frac{A+B'}{2}\right)^2 + \left(\frac{A'-B}{2}\right)^2$$

und

$$\nu_m - \omega', \quad \text{,,} \quad \left(\frac{A-B'}{2}\right)^2 + \left(\frac{A'+B}{2}\right)^2.$$

Jeder parallel H schwingenden Komponente entsprechen so zwei $\perp H$ schwingende, doch können die Intensitäten sehr verschieden sein, so daß einige Linien ganz zu fehlen scheinen. Besonders auffallend ist diese Anordnung in dem von Hrn. Lohmann¹⁾ untersuchten Spektrum von Neon. Im Quadruplett der Linie D_1 sind dagegen zwei Longitudinal- und nur zwei Transversalwellen. Wir behandeln den Fall unten: es sind die Intensitäten von $\nu + \omega'$ und $\nu - \omega'$ hier sehr verschieden.

Allerdings erscheint die Mitte des ganzen Liniensystems selbst aus der ursprünglichen Lage ν_0 nach $\nu_0 + \varepsilon$ verlegt. Betrachten wir aber entgegengesetzte Richtungen von H_0 im Atom (bzw. umgekehrte Stellung der Süd- und Nordpole des Molekularmagneten) als gleich möglich, so bleibt das Vorzeichen von $\cos \vartheta$ willkürlich, und man erhält das Spektrum:

Elektr. Kraft parallel H schwingend:

$$\nu_0 \pm \varepsilon \pm m\omega, \quad m_1 n_1 = 0, 1, 2 \dots$$

Elektr. Kraft senkrecht zu H schwingend:

$$\nu_0 \pm \varepsilon \pm n\omega \pm \omega', \quad m_1 n_1 = 0, 1, 2 \dots$$

Unter sehr allgemeinen Annahmen ergibt sich übrigens für ε eine erheblich kleinere Zahl als ω und ω' , so daß Linien mit den Schwingungszahlen $\nu + \varepsilon$ und $\nu - \varepsilon$ auch in Instrumenten mit hohem Auflösungsvermögen nicht mehr getrennt erscheinen. Wir setzen dies im folgenden voraus. Da nun ω'/ω eine rationale Zahl, und insbesondere eine ganze Zahl ist, falls ω die Periode der Bewegung, so folgt:

Bei beliebigen periodischen Bewegungen des Systems wird jede Linie in mehrere zerlegt, deren Abstände von der ursprünglichen Lage der Linie untereinander in rationalem Verhältnis stehen. Dies ist das Gesetz von Runge und Paschen. Allerdings haben diese Forscher darüber hinaus noch fest-

1) W. Lohmann, Inaug.-Diss. Halle 1907.

gestellt, daß zwischen den Werten von ω für verschiedene Serien und verschiedene Elemente ebenfalls rationale Verhältnisse stattfinden. Damit wird gefordert, daß für solche Gruppen verwandter Serien die Grundperiode der Bewegung von H_0 dieselbe sei, während allerdings die Koeffizienten $a_i, b_i, \alpha_i, \beta_i$ veränderlich sein können, wodurch die Intensitäten, nicht aber die Schwingungszahlen beeinflußt werden: so können z. B. im einen Fall die Linien mit geraden, im anderen die mit ungeraden Ordnungszahlen ganz fehlen.

Ist die Bewegung nicht periodisch, so ergibt sich das allgemeine Gesetz

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Parallel zu } H: \quad v_0 \pm m \omega, \quad m = 0, 1, 2 \dots \\ \text{Senkrecht zu } H: \quad v_0 \pm n \omega \pm \omega', \quad n = 0, 1, 2 \dots \end{array} \right.$$

Es lassen sich alle Schwingungszahlen linear und mit ganzzahligen Koeffizienten aus zwei Grundzahlen ω und ω' berechnen; ω' tritt nur in den \perp schwingenden Komponenten auf; sein Vorzeichen bestimmt den Drehungssinn.

Ob das Gesetz

$$\frac{\omega'}{\omega} = \text{rationale Zahl}$$

ein durchaus allgemeines sei, muß vorderhand dahingestellt bleiben. In manchen Fällen scheint diese Spezialisierung eine etwas gezwungene, und Hr. Runge¹⁾ sieht sich z. B. in dem von Lohmann (l. c.) untersuchten Spektrum von Neon genötigt, recht große Zähler und Nenner einzuführen, während bei Benutzung von (16) die Zahlen 0, 1, 2, selten 3 und 4 in allen mir bekannten Fällen ausreichen. So gehen bei Neon 6506,7 die Rungeschen Zahlen bis auf 17, während ist:

parallel: $v_0 \pm 1,56 m$ ($m = 0, 1$),

senkrecht: $v_0 \pm 1,56 m \pm 5,08$ ($n = 0, 1$).

Bei 6402,40 (Runge bis 10):

(p): $v_0 \pm m \cdot 0,78$ ($m = 0, 1, 2$); (s): $v_0 \pm 6,11 \pm n \cdot 0,78$ ($n = 0, 1, 2$)
(15 Komponenten).

Bei 6217,50 (R. bis 14):

(p): $v_0 \pm m \cdot 3,90$ ($m = 0, 1$); (s): $v_0 \pm 7,04 \pm 3,90 n$ ($n = 0, 1$).

1) C. Runge, Physik. Zeitschr. 8. p. 232. 1907.

Bei 6143,28 (R. bis 20):

$$(p): \nu_0 \pm 1,22 m \quad (m=1, 2); \quad (s): \nu_0 \pm 5,68 \pm 1,22 n \quad (n=1, 2).$$

Bei 6096,37 (R. bis 15):

$$(p): \nu_0 \pm 0,86 m \quad (m=0, 1); \quad (s): \nu_0 \pm 5,54 \pm 0,86 n \quad (n=0, 1).$$

Bei 6030,20 (R. bis 9):

$$(p): \nu_0 \pm m \cdot 0,34 \quad (m=2); \quad (s): \nu_0 \pm 2,76 \pm 0,34.$$

Bei 5944,91 (R. bis 8):

$$(p): \nu_0 \pm m \cdot 0,45 \quad (m=2, 4); \quad (s): \nu_0 \pm 5,58 \pm 0,45 \cdot n \quad (n=1, 3).$$

Bei 5882,04 (R. bis 21):

$$(p): \nu_0 \pm 0,77 \cdot m \quad (m=0, 1); \quad (s): \nu_0 \pm 7,14 \pm 0,77 m \quad (m=0, 1).$$

Bei der Linie 6143 liegen $\nu_0 \pm (5,68 - 2 \cdot 1,22) = \nu_0 \pm 3,24$ wohl zu nahe bei der starken parallel schwingenden Komponente; daher sind sie nicht wahrgenommen. Im übrigen beweist wegen den möglicherweise sehr verschiedenen Intensitäten das Fehlen einer berechneten Linie nichts gegen die Formel welche gewissermaßen nur ein Schema darstellt, in das die Linien hineinpassen müssen. Dieses Schema ist nicht eindeutig; bei 6143 könnte man z. B. setzen:

(p): $\nu_0 \pm 0,60 m \quad (m=2, 4); \quad (s): \nu_0 \pm 6,30 \pm 0,60 n \quad (n=1, 3)$, wobei nun die beobachteten Linien und nur diese dargestellt werden.

Bei den Satteliten der ersten Nebenserien von Hg und ihren Homologen ergeben sich ebenfalls¹⁾ hohe Zahlen bei Anwendung des Rationalitätsgesetzes:

3663,5 (R. bis 8):

$$(p): \nu_0 \pm 0,24 m \quad (m=2, 4); \quad (s): \nu_0 \pm 1,36 \pm 0,28 m \quad (m=1, 3).$$

3663,0 (R. bis 5):

$$(p): \nu_0 \pm 1,10 m \quad (m=0, 1); \quad (s): \nu_0 \pm 1,66 \pm 1,10 n \quad (n=0, 1).$$

3650 (R. bis 7):

$$(p): \nu_0 \pm 0,34 m \quad (m=1); \quad (s): \nu_0 \pm 1,28 \pm 0,34 m \quad (m=0).$$

3132,0 (R. bis 3):

$$(p): \nu_0 \pm 0,60 m \quad (m=0, 1); \quad (s): \nu_0 \pm 1,10 \pm 0,60 m \quad (m=0, 1).$$

1) C. Runge, l. c.; C. Runge u. F. Paschen, Berliner Ber. 1902.

3125,8 (R. bis 16):

$$(p): v_0 \pm 0,38 m \ (m = 1); \quad (s): v_0 \pm 1,20 \pm 0,38 n \ (n = 0, 1).$$

2987,4:

$$(p): v_0 \pm 0,60 m \ (m = 0, 1); \quad (s): v_0 \pm 0,60 \pm 0,60 n \ (n = 0).$$

Die neue Darstellung dürfte also den Vorzug der Einfachheit beanspruchen, und man wird, auch abgesehen von der hier vorgetragenen Theorie, die Möglichkeit einer Erklärung der Erscheinung als naheliegender betrachten, wenn, wie es hier geschieht, das Problem in zwei andere zerlegt wird: erstens, die Formeln (16) zu begründen, wobei m, n klein bleiben; zweitens, die häufig auftretenden rationalen Verhältnisse zwischen ω' und ω , insbesondere die Formel $\omega' = \text{Vielfaches von } \omega$, aus speziellen Annahmen über die Bewegung abzuleiten. Die Frage, ob $\omega'/\omega = \text{rationale Zahl}$ eine allgemeine Regel darstellt, d. h. ob die Bewegung stets eine periodische ist, für welche alle Punkte sich in geschlossenen Bahnen bewegen, ist ein Wahrscheinlichkeitsproblem, für dessen sichere Lösung noch weitere genaue Messungen abzuwarten sind. Die von Hrn. Runge (l. c.) angestellten Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen werden ungültig, wenn man von vornherein für die Linien das Gesetz (16) annimmt, statt eine willkürliche Verteilung vorauszusetzen.

Als Beispiel behandeln wir zunächst den Ansatz

$$\cos \vartheta = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad \psi = \omega t + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t,$$

also $\omega' = \omega$ unter der Annahme, daß die Größen zweiten Grades in $\alpha \beta, a b$, vernachlässigt werden dürfen. Da hier

$$\varepsilon = \omega (\alpha b - \beta a),$$

so wird $\alpha b - \beta a$ höchstens $= \frac{1}{10}$ etwa sein dürfen, damit seine Linien $v + \varepsilon, v - \varepsilon$ im mittleren Teil des Spektrums nicht mehr zu trennen seien.

Es ergibt sich in dieser Annäherung, wenn abkürzend $k = eH/\omega mc$ gesetzt wird,

$$\sin \vartheta = 1, \quad Q = + (k - 1) [-a \sin \omega t + b \cos \omega t] + v_0(t - t_0),$$

$$\cos \psi = \cos \omega t - [\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t] \sin \omega t,$$

$$\sin \psi = \sin \omega t + [\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t] \cos \omega t.$$

Es ergeben sich somit durch Einsetzen in (11) die folgenden Linien:

Parallel H schwingend:

$$\nu_0 \text{ (Intens. } = 1); \quad \nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens.} = \frac{(a^2 + b^2)(k-1)^2}{4}.$$

Senkrecht H schwingend:

$$\nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens.} = \frac{1}{4};$$

$$\nu_0 + 2\omega, \quad \text{Intens.} = \left[\frac{a(k-2) - \beta}{4} \right]^2 + \left[\frac{b(k-2) + \alpha}{4} \right]^2,$$

$$\nu_0 - 2\omega, \quad \text{Intens.} = \left[\frac{a(k-2) + \beta}{4} \right]^2 + \left[\frac{b(k-2) - \alpha}{4} \right]^2.$$

Der Drehungssinn von $\nu_0 + \omega$, $\nu_0 + 2\omega$ ist entgegengesetzt demjenigen von $\nu_0 - \omega$, $\nu_0 - 2\omega$. Die Dissymmetrie der Intensitäten wird aufgehoben, wenn man, wie oben auseinander gesetzt, entgegengesetzte Lagen von H_0 , d. h. entgegengesetzte Vorzeichen von $\cos \vartheta, a, b$ als gleich möglich, und in der Lichtquelle gleich häufig vorkommend, betrachtet, so daß zu den angeschriebenen Werten der Intensitäten noch weitere ebensolche Ausdrücke hinzukommen, in welchen a, b durch $-a, -b$ ersetzt sind.

Es ergibt sich also ein *Quintuplett äquidistanter Linien*, bei welchem die parallel und senkrecht schwingenden Komponenten zum Teil aufeinanderfallen. Sind a, b bedeutend kleiner als α, β , so verschwinden die seitlichen Parallelkomponenten.

Die Intensität der äußersten Linien ist bedeutend kleiner als die der mittleren.

Wird derselbe Ansatz gemacht, aber $\omega' = 3\omega$ statt $\omega' = \omega$ gesetzt, so ergibt sich ein *Nonett äquidistanter Linien*, wie es von Runge und Paschen in der zweiten Nebenserie beobachtet ist (Hg 5461, 3342 und Homologe), wobei die äußersten Linien am schwächsten sind:

$$(p): \nu_0 \pm m\omega \quad (m=0, 1); \quad (s): \nu_0 \pm 3\omega \pm n\omega \quad (n=0, 1).$$

Bei der Rechnung sind Glieder zweiten Grades vernachlässigt worden. Dieselben würden zunächst die Intensitätsverhältnisse der erhaltenen Linien etwas beeinflußt haben; doch sind dieselben so unsicher beobachtet, daß diese Korrektion ganz bedeutungslos ist. Ferner werden neue Linien eingeführt, deren

Intensitäten von der Ordnung $(a \pm b/4)^4$, $(\alpha \pm \beta/4)^4$ sind. Wählt man also für a, b, α, β Zahlen von der Ordnung $1/k$, wobei k mit 1 vergleichbar sei, so ist die Intensität der äußersten Linien etwa $1/10$ bis $1/20$ der mittleren, oder noch weniger, die der bei exakter Berechnung neu hinzukommenden $1/100$ bis $1/400$ oder noch geringer; dieselben würden sich also in den meisten Fällen der Beobachtung entziehen, da selbst bei längerer Exposition die viel größere Intensität der Zentrallinien die Beobachtung sehr erschwert.

Ein weiterer einfacher, wenn auch ziemlich allgemeiner Fall ist der, daß $d\psi/dt = \text{konst.}$, und zwar¹⁾

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{eH}{mc} = \omega'.$$

Dann reduziert sich Q auf $\nu_0(t - t_0)$, und es ergibt sich, falls abkürzend $t_0 = 0$ gesetzt wird:

Parallel H : $z = \sin \nu_0 t \sin \vartheta$,

$$\perp H: \begin{cases} x = \cos \nu_0 t \cos \omega' t - \cos \vartheta \sin \nu_0 t \sin \omega' t, \\ y = \cos \nu_0 t \sin \omega' t + \cos \vartheta \sin \nu_0 t \cos \omega' t. \end{cases}$$

Hierin ist nun für ϑ eine beliebige periodische Funktion einzusetzen. Sei sehr annähernd

$$\sin \vartheta = A \sin \omega(t - t_0), \quad |A| < 1,$$

so ergibt sich für positives Vorzeichen von $\cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}$:

Parallel H :

$$\nu_0 \pm \omega, \quad \text{Intens.} = \frac{A^2}{4}.$$

Senkrecht H :

$$\nu_0 + \omega', \quad \text{Intens.} \left[1 - \frac{A^2}{8} - \frac{3A^4}{128} \dots \right]^2;$$

$$\nu_0 - \omega', \quad \text{Intens.} \left[\frac{A^2}{8} + \frac{3A^4}{128} + \dots \right]^2;$$

$$\nu_0 \pm 2\omega \pm \omega', \quad \text{Intens.} \left[\frac{A^2}{16} + \frac{A^4}{64} + \dots \right]^2.$$

1) Die Ebene (HH_0) dreht sich also um H mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit eH/mc und in demselben Sinne, wie freie Elektronen im Felde H ; dabei führt aber H_0 in dieser Ebene noch pendelartige Schwingungen aus.

Für negative Vorzeichen von $\cos \vartheta$ werden die Parallelkomponenten nicht geändert in ihrer Intensität und Lage; die Intensitäten von $v_0 + \omega'$, $v_0 - \omega'$ vertauschen sich aber. Da umgekehrte Vorzeichen von $\cos \vartheta$, d. h. von H_0 , verschiedenen Molekülen entsprechen, und keine Phasenrelation zwischen solchen besteht, addieren sich die Intensitäten und man erhält:

Parallel:

$$v_0 \pm \omega, \text{ Intens. } \frac{A^2}{2}.$$

Senkrecht:

$$v_0 \pm \omega', \text{ Intens. } \left[1 - \frac{A^2}{8} + \dots \right]^2 + \left[\frac{A^2}{8} + \dots \right]^2;$$

$$v_0 \pm 2\omega \pm \omega', \text{ Intens. } 2 \left[\frac{A^2}{16} + \dots \right].$$

Für $A = \frac{3}{4}$ sind die Intensitäten also

$$0,28(p), 0,87(s) \text{ und } 0,0003(s).$$

Die letztere Linie ist nicht wahrzunehmen, so daß ein *Quadruplett resultiert*.

Für $A = \frac{7}{8}$ ergibt sich:

$$\text{Intens. (p)} 0,38; \text{ (s)} 0,80; \text{ (s)} 0,005.$$

Hier könnte längere Exposition ein *Oktett* ergeben.

Es müßten also, wie man sieht, die Fourierschen Reihen für $\cos \vartheta$ recht langsam konvergieren, um noch kompliziertere Zerlegungen zu ergeben.

Für $A = 1$ ergibt sich ein neues *Oktett*:

$$(p): v_0 \pm \omega; \quad (s): (v_0 \pm \omega'); \quad (s): v_0 \pm \omega' \pm \omega.$$

Zwischen ω' und ω soll, nach Voraussetzung, ein rationales Verhältnis bestehen. Sei zunächst $A = \frac{3}{4}$ ungefähr, und $\omega' = \omega$, so ergibt sich ein Dublett mit koinzidierenden Parallel- und Perp.-Komponenten [Hg 2536,72 nach Runge und Paschen, und viele von Purvis untersuchte Linien, z. B. Vanadium¹⁾ 3885,03; 3876,25; 3566,32 usw.; Ruthenium²⁾ 4584,7; 4372,7 usw.].

Für $\omega' = 2\omega$ ergibt sich das *Quadruplett der Linie D₁*.

Für $\omega' = 3\omega$, A vergleichbar mit $\frac{7}{8}$, reduziert sich das Oktett auf das *Sextett der Linie D₂*.

1) Purvis, Trans. Cambr. Phil. Soc. 20. p. 210. 1906.

2) Purvis, Proc. Cambr. Phil. Soc. 13. p. 351. 1908.

Mit den beiden (*p*)-Komponenten koinzidieren zwei (*s*)-Komponenten, die aber wesentlich schwächer sind, und vielleicht deshalb nicht beobachtet. Im übrigen sind die quantitativen Verhältnisse die von Runge und Paschen beobachteten. Bei D_2 hat man ω halb so groß zu wählen wie bei D_1 , oder besser bei D_1 anzusetzen

$$\sin \vartheta = A \sin 2\omega(t - t_0) \text{ statt } A \sin \omega(t - t_0).$$

Die beiden *D*-Linien würden bei dieser Auffassung zu einer und derselben Grundperiode gehören. Der Wert $e/mc = \omega'/H$, der sich für das schwingende Teilchen ergibt, beträgt allerdings nur $\frac{2}{3}$ des Kathodenstrahlwertes $1,88 \cdot 10^7$. Allgemein übersteigt ω'/H in keinem bisher beobachteten Fall den Kathodenstrahlwert; bei den sehr weiten Triplets Zn 4680 und ihren Homologen bei Hg usw. ist nach den neuesten absoluten Messungen von P. Weiss und A. Cotton¹⁾, sowie nach A. Stettenheimer²⁾ $\omega'/H = 1,78 \cdot 10^7$; der Kathodenstrahlwert wird nicht ganz erreicht. Für dasselbe Triplet ergibt sich dagegen nach Lorentz' Theorie $e/mc = 3,56 \cdot 10^7$, und es gilt der Satz: für kein Triplet ist e/mc größer als das Doppelte des Kathodenstrahlwertes. Von komplizierteren Zerlegungen muß ich dabei absehen, da eine Theorie derselben nicht vorliegt, außer in den von Robb³⁾ behandelten Fällen (Nonett usw.); hier gilt derselbe Satz: für das Nonett ist $e/mc = \text{Doppelter Kathodenstrahlwert}$.

Ich halte die Aussage $e/mc \leqq \text{Kathodenstrahlwert}$, in welcher die Annahme magnetischer (und nicht elastischer!) Molekularkräfte eine wesentliche Rolle spielt, für bedeutend einfacher und plausibler als die Aussage, es könne e/mc sowohl kleinere als größere Werte wie $1,88 \cdot 10^7$ annehmen, jedoch über das Doppelte dieses Betrages nicht hinausgehen, und glaube hierin eine nicht unwesentliche Stütze der gemachten Grundhypothese erblicken zu dürfen.

Es kann aber auch $\omega' = \omega/2$ gesetzt werden; dann erscheint ein *inverses Quadruplett*, in welchem die (*s*)-Komponenten zwischen den (*p*)-Komponenten liegen.

1) P. Weiss u. A. Cotton, Journ. de Phys. Juni 1907.

2) A. Stettenheimer, Inaug.-Diss. Tübingen 1907.

3) A. A. Robb, Inaug.-Diss. Göttingen 1904.

Ist endlich $\omega' = \omega/n$ bedeutend kleiner als ω , so ergibt sich das *inverse Triplet*, welches, wie das inverse Quadruplett, von Becquerel und Deslandres¹⁾ im Spektrum von Fe zuerst beobachtet wurde: die seitlichen Komponenten sind (p), die zentralen (s).

Dem Ansatz

$$\sin \vartheta = a + b \sin \omega(t - t'), \quad |a| < 1, \quad |b| < 1$$

entspricht die Zerlegung in drei (p)-Komponenten v_0 , $v_0 \pm \omega$; die (s)-Komponenten, deren Intensitäten je nach den Werten von a und b sehr verschieden sein können, sind

$$v_0 \pm \omega', \quad v_0 \pm \omega \pm \omega', \quad v_0 \pm 2\omega \pm \omega'.$$

Sind a , b von der Größe $\frac{1}{4}$ etwa, und ist $\omega' = \omega$, so erhält man ein *Triplet*, wie es Runge und Paschen in der ersten Nebenserie von Mg, Ca, Sr, Hg [hier $\lambda = 2967,37$; 2534,89] beobachtet haben, in welchem drei (p)-Komponenten, und, mit den zwei äußeren koinzidierend, zwei (s)-Komponenten erscheinen.

Diese Beispiele, die sich leicht vermehren ließen, mögen genügen, um zu zeigen, daß die Theorie in der Tat eine große Anzahl charakteristischer, anomaler Zeeman-Effekte quantitativ richtig darstellt. Zu den bisherigen Betrachtungen kommt aber noch ein neues Moment hinzu. Verändert man bei gleich bleibender Bewegung des Moleküls und somit gleichem ω die Stellung von H_0 im Molekül, so bleibt das Schema der Linien $v \pm m\omega$ usw. unverändert, die Intensitäten aber ändern sich. Beschreiben wir die Bewegung des Moleküls mittels der drei Eulerschen Winkel²⁾ φ , ϑ , ψ , wobei die erste Lage von H_0 als z -Achse des bewegten Koordinatensystems gelte, so daß ϑ , ψ mit den bisher so bezeichneten Winkeln zusammenfallen. Seien ϑ_0 , φ_0 die in bezug auf dies bewegte System unveränderliche Polarkoordinaten der neuen Richtung von H_0 ³⁾, und endlich ϑ' , ψ' die Winkel von H_0' mit dem festen System,

1) H. Becquerel u. H. Deslandres, Compt. rend. 127. p. 18. 1898.

2) Vgl. z. B. F. Klein u. A. Sommerfeld, Theorie des Kreisels 1. p. 17. Leipzig 1897.

3) So daß $\sin \vartheta \sin \varphi$, $\sin \vartheta \cos \varphi$, $\cos \vartheta$ die Richtungskosinusse von H_0' in bezug auf die bewegten Achsen sind.

die den früheren ϑ, ψ entsprechen, und die nunmehr statt ϑ, ψ in die Formeln (11) einzutragen sind. Dann ist

$$\cos \vartheta' = \sin \vartheta \sin \vartheta_0 \cos (\varphi - \varphi_0) + \cos \vartheta \cos \vartheta_0,$$

$$\sin \psi' = \frac{1}{\sin \vartheta'} \{ -\sin \vartheta_0 \cos \psi \sin (\varphi - \varphi_0) - \sin \vartheta_0 \cos \vartheta \sin \psi \\ \cos (\varphi - \varphi_0) + \cos \vartheta_0 \sin \vartheta \sin \psi \},$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sin \vartheta'} \{ \sin \vartheta_0 \sin \psi \sin (\varphi - \varphi_0) - \sin \vartheta_0 \cos \vartheta \cos \psi \\ \cos (\varphi - \varphi_0) + \cos \vartheta_0 \sin \vartheta \cos \psi \}.$$

Mithin ist ϑ' von ω' unabhängig, und $\sin \psi', \cos \psi'$ sind wie $\sin \psi, \cos \psi$ lineare Funktionen von $\cos \omega' t, \sin \omega' t$, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Falls nun dem Atom, wie einem Kristall, unter Umständen gewisse Symmetrien zukommen, so werden sich die Elementarmagnete bei verschiedenen Molekülen an verschiedenen Stellen ansetzen können. Rotieren etwa alle Moleküle um ihre größte Hauptträgheitsachse, so daß $d\psi/dt, \vartheta$ konstant sind, so entsprechen den verschiedenen Ansatzstellen zwar dasselbe ω' , aber im allgemeinen verschiedene ϑ , und die magnetische Zerlegung einer Linie der entsprechenden Serie erscheint als die Superposition dieser Einzelzerlegungen.

Wichtig ist, daß, von einzelnen Fällen, wie z. B. das Triplet, abgesehen, im allgemeinen sich eine theoretisch unendliche Anzahl von Komponenten ergibt, deren Intensitäten aber mehr oder weniger rapid abnehmen, so daß eine verhältnismäßig einfache Zerlegung sich ergibt. Die Beobachtung bestätigt in der Tat in vielen Fällen, daß bei komplexen Zerlegungen einzelne Komponenten, besonders die äußersten, schwach sind¹⁾, so daß man den Eindruck erhält, daß die Linie sehr wohl in ein ganzes Spektrum zerlegt sein könnte, von welchem nur die eine gewisse Minimalintensität besitzenden Linien wahrgenommen werden. Dies ist wohl insbesondere auch der Fall bei der von Lohmann (l. c.) gefundenen Zerlegung in 15 Komponenten, von denen je fünf äquidistant

1) Bei komplizierten Trennungen beobachtete Hr. Lohmann (l. c.), wie er selbst angibt, immer einige sehr schwache Linien. Vgl. die photogr. Reproduktionen bei Lohmann, insbesondere Figg. 3 und 4 (Nonett und Sextett), und bei Runge u. Paschen, Abh. d. Berliner Akad. 1902.

sind, und deren Erklärung auf Grund der Theorie der komplexen Elektronen, wenn sie überhaupt möglich, ein sehr kompliziertes Bild erfordern müßte. In der hier vorgetragenen Theorie entspricht sie einer etwas langsameren Konvergenz der Fourier-Reihen, wobei aber doch die Ordnungszahlen $m = 0, m = 1, m = 2$ allein in Betracht kommen, und $\omega' = 6\omega$ ist (angenähert). Längere Exposition könnte daher wohl in vielen Fällen neue, schwache Linien zum Vorschein bringen. Bei weniger scharfen Linien würde — was vielfach beobachtet wird — eine mehr oder weniger diffuse, nach den Rändern hin abschattierte Erscheinung sich zeigen, deren Auflösung nicht mehr gelingt.

Die Beurteilung der Intensitäten ist sehr unsicher und wird noch dadurch erschwert, daß, wie Hr. Zeeman¹⁾ neuerdings gezeigt hat, das Reflexionsvermögen der Gitter für verschiedene polarisiertes Licht sehr verschieden sein kann. Die Anwesenheit von Trabanten kann eine bedeutende Unsicherheit auch der Wellenzahlen, und selbst eine scheinbare Disymmetrie im Felde hervorrufen, besonders wegen des Umstandes, daß ihre relative Intensität im Feld sich oft sehr verändert²⁾, so daß einige Linien ganz verschwinden, während dafür Linien erscheinen³⁾, die vorher nicht wahrnehmbar waren.

Ich muß es daher dahingestellt sein lassen, ob die entwickelte Theorie in jeder Hinsicht zur Darstellung der Beobachtungen sich eignet. Doch zeigen die vorangehenden Entwickelungen, wie ich glaube, daß die Annahme, es sei ein Molekularfeld H_0 — von starren Bedingungen abgesehen — die einzige treibende Kraft, welche auf die die Serienspektren erzeugenden schwingenden Teilchen wirkt, in wesentlich höherem Maße als die Lorentzsche Hypothese der Ionen geeignet ist die Erscheinungen des Zeeman-Effektes in ihrer großen Mannigfaltigkeit und ihren charakteristischen Merkmalen darzustellen, wobei von Wichtigkeit ist, daß sie sich auch bei der Erklärung der Seriengesetze bewährt — ein Problem, welches von der Lorentzschen Theorie ganz unberührt geblieben ist.

1) P. Zeeman, Versl. Amsterdam, Dez. 1907.

2) Vgl. insbesondere W. Hartmann, Inaug.-Diss. Halle 1907.

3) Hierher gehört vermutlich die von Runge u. Paschen, i. e. bei der Linie Hg 2536,72 erwähnte Erscheinung.

Damit wäre zunächst die Frage nach der Ursache der anormalen Zeeman-Effekte auf die einfacherre reduziert, die angenommenen periodischen Bewegungen des Moleküls im Felde zu erklären. Hierbei spielen aber eine wesentliche Rolle die ganz unbekannten Faktoren: Struktur des Atoms, Verteilung seiner Ladung, innere Bewegungen (wie z. B. die die molekularen Magnetfelder erzeugenden sehr großen Drehgeschwindigkeiten elektrischer Ladungen), endlich elektromagnetische Trägheitsreaktionen. Vielleicht hat man also eher aus dem Zeeman-Effekt auf diese Faktoren zu schließen. Von der Lösung der Aufgabe, jeder einzelnen Serie ihren bestimmten Zeeman-Effekt zuzuerteilen, muß die Theorie im gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis der Atome wohl absehen. Doch ist es wichtig wenigstens zu zeigen, daß prinzipielle Schwierigkeiten den gemachten Annahmen über die Molekularbewegung im magnetischen Feld nicht entgegenstehen.

Es ist zunächst zu beachten, daß die Molekularstöße in der Lichtquelle, in Abwesenheit eines magnetischen Feldes, keine mit den hier in Betracht kommenden vergleichbare Rotationsgeschwindigkeit hervorbringen, worauf Lord Rayleigh hingewiesen hat; es würden sonst die Linien sämtlich diffus, da innerhalb gewisser Grenzen alle Rotationsgeschwindigkeiten möglich sein müßten. Hinfällig wird der Schluß nur, wenn man, wie dies in der Lorentzschen Elementartheorie des Zeeman-Effektes angenommen wird, für die auf ein schwingendes Teilchen wirkenden Kräfte *vollständige Kugelsymmetrie* annimmt, und zwar für *alle* emittierten Linien — eine Annahme, die recht unwahrscheinlich ist. Die besondere Schärfe der Quecksilberlinien (zu denen jetzt noch Neon- und Heliumlinien zuzufügen sind) wird darauf zurückgeführt, daß bei einatomigen Gasen nach der kinetischen Theorie keine Rotationsenergie bestehen soll.

Ferner erfordert die von Runge und Paschen wenigstens sehr angenähert konstatierte Unveränderlichkeit der Zerlegung innerhalb einer Serie, daß die Hinzufügung neuer Elementarmagnete ohne merklichen Einfluß auf die Bewegung des Moleküls bleibe. Man wird also wohl die magnetische Polarisation des Moleküls von der Betrachtung ausschließen können.

Trägt das Molekül elektrische Ladungen — wobei seine

Gesamtladung, und daher sein Dopplereffekt in den Kanalstrahlen, null sein können — so wird das Magnetfeld die Bewegung beeinflussen. Allein, da die magnetische Kraft bekanntlich bei reibungslos bewegten Ladungen keine Arbeit leistet, bleibt die Energie der Rotation des Moleküls um seinen Schwerpunkt im großen ganzen dieselbe wie vorher, und es kann keine Zerlegung der Linien erfolgen.

Diesem Einwand kann man durch folgende Überlegung begegnen. In allen für Spektraluntersuchungen dieser Art benutzten Lichtquellen bewegte sich eine große Anzahl freier Elektronen, welche im Magnetfeld Schraubenlinien mit einer und derselben Drehgeschwindigkeit $\omega = eH/mc$ durchlaufen. Daß diese Veränderung ihrer Bewegung auf die Intensität der Linien von Einfluß ist, wurde oben bemerkt; es liegt die Annahme nahe genug, daß sie den Molekülen nun wesentlich größere Rotationsgeschwindigkeiten beizubringen vermögen, als wenn sie sich in geradlinigen Bahnen bewegen. Da der „Stoß“ eines Elektrons auf ein Molekül ein recht schwieriger Begriff ist, wird man wohl besser von elektromagnetischen Impulsen bei großer Annäherung, ohne Berührung, reden; dann ist für die Energieübertragung von den freien Elektronen auf die Moleküle die Ladung derselben und die Verteilung dieser Ladung maßgebend. Bei Bandenspektren scheint nach den bisherigen Untersuchungen keine Ladung vorhanden zu sein; daraus erklärt sich, daß kein Zeeman-Effekt der betrachteten Art bei ihnen eintritt.

Betrachten wir zunächst das Molekül als einen starren Körper, mit welchem die Elementarmagnete starr verbunden sind. Die Bewegung dieses Körpers im magnetischen Felde geht nicht kräftefrei vor sich. Doch erscheinen die Drehmomente, die das Feld auf ihn ausübt¹⁾, mit einem Faktor von der Form EH/AC multipliziert, wo A ein Trägheitsmoment in bezug auf den Schwerpunkt ist, und E eine ebenso mit den elektrischen Ladungen an Stelle träger Massen gebildete Größe bedeutet. Bei homogener Ladung ergibt sich also die Größenordnung eH/Mc (e gleich Ladung des Atoms,

1) Dieselben sind, unter der speziellen Voraussetzung homogener Ladung, von W. Voigt gegeben (Ann. d. Phys. 9, p. 115. 1902).

M seine Masse). Da aber e/Mc höchstens $1/1000$ des Kathodenstrahlwertes beträgt, so sind die durch diese Drehmomente hervorgerufenen Oszillationen viel langsamer als die zur Erklärung des Zeeman-Effektes herangezogenen.¹⁾ Betrachten wir also zunächst die Bewegung als kräftefrei; es ist bekannt, daß die Integration, in diesem Falle wie auch beim schweren Kreisel, beim Pendel usw., auf eine Darstellung der Eulerschen Winkel durch elliptische Funktionen führt. Die Fourierschen Entwicklungen der Funktionen $s n x, c n x, d n x$ sind von Jacobi²⁾ gegeben, und konvergieren in den meisten Fällen so rasch, daß nur die beiden ersten Glieder in Betracht kommen. Die Bewegung hat also den vorausgesetzten Charakter; im allgemeinen ist sie allerdings nicht periodisch, sondern es sind ω, ω' beliebig, und hängen von den Integrationskonstanten ab. Dies ist im allgemeinen bei ähnlichen Problemen der Fall, und es würde hierin ein wichtiger Einwand liegen, wenn man diese Konstanten wirklich als willkürlich betrachten könnte. Dies ist jedoch nicht der Fall. Denn da die Bewegung durch die Rotation der Elektronen um Achse H hervorgebracht wird, und andere Elektronenbewegungen keine merklichen Drehgeschwindigkeiten hervorzubringen imstande sind, wird die bei freier Bewegung im Raum unveränderliche Richtung des Flächenvektors parallel H liegen müssen, und die ebenfalls unveränderliche Komponente der Instantanrotation in Richtung des Flächenvektors gleich der Elektronenrotation $\omega = eH/mc$ zu setzen sein. Es bleibt dann nur noch die Größe der Rotationsenergie des Moleküls willkürlich. Unter Berücksichtigung der schon angegebenen Bedingungen dürfte dieselbe sehr wahrscheinlich einem Maximum- oder Minimumwert zustreben — schon aus Stabilitätsgründen — d. h. eine der Hauptträgheitsachsen wird bestrebt sein, sich in die Richtung von H zu legen, so daß schließlich eine gleichförmige Rotation um diese Achse bei der großen Mehrzahl der Moleküle resultiert. Der Winkel von H_0 gegen diese Achse, und somit gegen H , hat dabei einen durch die

1) Zwingend ist der Schluß allerdings nicht, da für das Zustandekommen einer Wirkung genügen würde, daß ein Trägheitsmoment bedeutend kleiner als die anderen sei, oder daß die Elementarmagnete im Atom beweglich seien.

2) G. C. J. Jacobi, Fundamenta nova § 39, Formeln (19), (21), (25).

Molekularstruktur bestimmten, unveränderlichen Wert ϑ_0 ; besitzt das Molekül Symmetrien, so sind mehrere Werte von ϑ_0 möglich. Auch $d\psi/dt$ hat nach Voraussetzung den unveränderlichen Wert $\omega' = eH/mc$. Wir haben diesen Fall oben behandelt; es entspricht ihm insbesondere, für $\vartheta = 90^\circ$, das Triplet Zn 4680 und die Homologen bei Hg, Cd usw.

Doch ist diese Bewegung ein viel zu spezieller Fall des allgemeinen Ansatzes, um zur Beschreibung der Erscheinungen auszureichen. Sie sollte uns nur als Beispiel dienen zur Festlegung scheinbar willkürlicher Integrationskonstanten, die in ω, ω' eingehen können.

Wie nun die von der Theorie geforderten Bewegungen des Moleküls oder, besser gesagt, der vielleicht im Molekül beweglichen Achse H_0 zustande kommen, und warum sie bei verschiedenen chemisch verwandten Molekülen dieselben sind, wie aus den Untersuchungen von Runge und Paschen über die Zerlegung einander entsprechenden Linien im magnetischen Feld hervorgeht, muß ich dahingestellt lassen. Daß periodische Bewegungen ausgezeichnet seien, bzw. daß die ihnen entsprechenden Anfangsbedingungen besonders häufig vorkommen, wie wir angenommen haben, wird man wohl als plausibel betrachten können, da hierbei jeder Punkt eine *geschlossene Bahn* durchläuft, im Gegensatz zu allgemeinen Bewegungen, wo ω, ω' zueinander inkommensurabel sind.

In dieser Darstellung bildet also der Zeeman-Effekt für die Rotationsbewegung des Moleküls, wie das Ohr für die Lufschwingungen, gewissermaßen einen *harmonischen Analysator*.

Tübingen, Januar 1908.

(Eingegangen 5. Februar 1908.)

3. Zur Theorie der Kombinationstöne; von L. Hermann.

Die vor kurzem erschienene Veröffentlichung von E. Waetzmann über den gleichen Gegenstand¹⁾ veranlaßt mich zur Mitteilung folgender Bemerkungen und Versuche.

Wie ich schon 1891 gezeigt habe²⁾, läuft das Verfahren, durch welches Helmholtz die von ihm aufgestellte (einem unsymmetrisch elastischen Körper entsprechende) Differentialgleichung

$$(1) \quad m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + a x + b x^3 + f \sin p t + g \sin q t = 0$$

näherungsweise integriert hat, darauf hinaus, daß x in eine nach Potenzen des Koeffizienten b fortschreitende Reihe entwickelt wird:

$$(2) \quad x = x_1 + b x_2 + b^2 x_3 + b^3 x_4 + \dots,$$

worin x_1, x_2 usw. Funktionen von t sind.

Wie Waetzmann selbst hervorhebt, ist dies nur richtig, wenn die Reihe für jeden Wert von t konvergiert, wofür Helmholtz, der die Konvergenzbedingung nicht erwähnt, keinerlei Beweis erbracht hat. Auch Waetzmann muß darauf verzichten, diesen Beweis zu führen, und vermutet nur die Konvergenz, weil das Resultat der Rechnung physikalischen Sinn hat.

Ich selbst hatte in meiner angeführten Arbeit von 1891 gefolgert, daß der Faktor b als so klein angenommen werden müsse, daß seine höheren Potenzen gegen niedrigere vernachlässigt werden dürfen, in welchem Falle die Reihe (2) konvergiert, aber die den Faktor b enthaltenden Amplituden der Kombinations-

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 24. p. 68. 1907. Diese Abhandlung ist die Wiedergabe eines Teiles der Habilitationsschrift des Herrn Verfassers (Breslau 1907), von welcher ich durch die Güte desselben ein Exemplar vor längerer Zeit erhielt. Die infolgedessen von mir ausgeführte ausführlichere Arbeit wird demnächst im Archiv f. d. ges. Physiologie erscheinen.

2) L. Hermann, Zur Theorie der Kombinationstöne. Archiv f. d. ges. Physiologie 49. p. 498. 1891. (Vgl. daselbst p. 505 Anm.)

töne, und erst recht deren Intensitäten, sehr klein sein müßten gegen die der Primärtöne, was den Tatsachen widerspricht.

Wenn man aber auch mit Waetzmann die Reihe als konvergent ansehen wollte, ohne b als sehr klein anzunehmen, so läßt sich doch, wie das folgende zeigen wird, eine strenge Begrenzung für die zulässige Größe von b , und somit für die relative Stärke der Kombinationstöne ableiten.

Der in Gleichung (1) angenommene unsymmetrisch elastische Körper würde, sich selbst überlassen, der Gleichung

$$(3) \quad m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ax + bx^2 = 0$$

gehören. Schon eine oberflächliche Betrachtung lehrt aber, daß ein solcher Körper nur in beschränktem Grade, d. h. nur bei nicht zu großer Beanspruchung der Elastizität, schwingungsfähig ist, und daß die Grenzen in dieser Beziehung um so enger werden, je größer b). Für $x = -a/b$ existiert nämlich eine zweite, allerdings labile Gleichgewichtsstellung; wenn aber x noch größere negative Werte als diesen erreicht, so wird die rücktreibende Kraft negativ, d. h. sie wirkt die bereits bestehende Elongation vergrößernd, so daß überhaupt keine Rückkehr zum Nullpunkt möglich ist. Die kritische Lage kann aber bei gegebenem b um so leichter überschritten werden, aus je größerer positiver Elongation der Körper losgeschwungen, oder mit je größerer Geschwindigkeit er von der positiven Seite her den Nullpunkt durchläuft.

Eine bestimmte Übersicht kann aber erst die Integration der Gleichung (3) liefern, welche über die Eigenschwingung des Körpers Aufschluß gibt, und welche in geschlossener Form ausführbar ist.

Hierzu wird zweckmäßig eine neue Variable eingeführt, indem man setzt

$$(4) \quad x = -\frac{6}{b}z - \frac{a}{2b}.$$

Dann geht (3) über in

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - 6z^2 + \frac{a^2}{24} = 0.$$

1) Hier und in allen folgenden Ausführungen ist b als eine positive Größe angesehen. Für negative b (d. h. für eine Asymmetrie von entgegengesetztem Sinne) gelten also die nachfolgenden Folgerungen nicht, obwohl die Behandlung auch dieses Falles ebenso ausführbar wäre.

Durch Multiplikation mit $2(\partial z / \partial t)$ und Integration erhält man

$$(5) \quad \sqrt{m} \frac{\partial z}{\partial t} = \sqrt{4z^3 - \frac{a^2}{12}z + C},$$

worin C eine Konstante ist. z (und ebenso x) ist also eine *elliptische Funktion* von t , die sich am einfachsten in der Weierstrassschen Form darstellen läßt.

Weit wichtiger aber als die genauere Formulierung und Diskussion dieser Funktion (hierüber vgl. unten p. 702 Anm. 2) ist die Untersuchung, unter welchen Bedingungen die elliptische Funktion eine *periodische Bewegung* bedeutet; denn schwingungsfähig muß der supponierte Körper vor allem sein, wenn die ganze Betrachtung Sinn haben soll. Hierzu muß der in (5) unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck dritten Grades drei reelle, und zwar verschiedene Wurzeln haben. Um aber hierüber zu entscheiden, muß zunächst über die Konstante C verfügt, d. h. bestimmte Anfangsbedingungen eingeführt werden. Dies habe ich für zwei nächstliegende Fälle getan.

Fall 1. Zu Anfang sei der Körper um die Länge A in positiver Richtung aus seiner Gleichgewichtslage gebracht, und werde nun losgelassen. Dann ist

$$\text{für } t = 0 \quad z = A \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

also mit der Variablen z

$$\text{für } t = 0 \quad z_0 = -\frac{b}{6} \left(A + \frac{a}{2b} \right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_0 = 0,$$

womit sich aus (5) ergibt:

$$C = -4z_0^3 + \frac{a^2}{12}z_0,$$

so daß der unter dem Wurzelzeichen in (5) stehende Ausdruck die Form annimmt:

$$4(z^3 - z_0^3) - \frac{a^2}{12}(z - z_0) \quad \text{oder} \quad 4(z - z_0) \left(z^2 + z_0 z + z_0^2 - \frac{a^2}{48} \right).$$

Oszillatorische Bewegung tritt also nur ein, wenn die Gleichung

$$z^2 + z_0 z + z_0^2 - \frac{a^2}{48} = 0$$

zwei ungleiche reelle Wurzeln hat, d. h. wenn

$$a^2 > 36x_0^2 \quad \text{oder} \quad a^2 > b^2 \left(A + \frac{a}{2b} \right)^2.$$

Es muß also sein:

$$(6) \quad b < \frac{a}{2A}, \quad \text{oder} \quad b = \frac{\delta a}{2A},$$

worin δ ein echter Bruch ist.¹⁾

Nun sind die von Helmholtz aus Gleichung (1) berechneten Amplituden, mit welchen der angenommene unsymmetrisch elastische Körper die beiden Primärtöne und den Differenzton gibt, bzw.:

$$(7) \quad \lambda = \frac{f}{m(p^2 - r^2)}, \quad \mu = \frac{g}{m(q^2 - r^2)}, \quad \xi = \frac{b\lambda\mu}{m[(p - q)^2 - r^2]},$$

hierin ist λ für das Helmholtzsche εu , μ für εv gesetzt, ferner ist

$$(8) \quad r = \sqrt{\frac{a}{m}}$$

die Zahl der Eigenschwingungen, welche der Körper bei gewöhnlicher symmetrischer Elastizität (in 2π Sekunden) machen würde. Mit Helmholtz können wir ferner r als sehr klein gegen p , q und $p - q$ ansehen, so daß wir für die bloße Be- trachtung von Größenordnungen schreiben können

$$(9) \quad \lambda = \frac{f}{mp^2}, \quad \mu = \frac{g}{mq^2}, \quad \xi = \frac{b\lambda\mu}{m(p - q)^2}.$$

Unsere Aufgabe ist nun, die Größenordnung von ξ mit denjenigen von λ oder μ zu vergleichen. Helmholtz selbst sagt hierüber: sind λ und μ klein, so ist ξ , weil es das Produkt $\lambda\mu$ enthält, eine kleine Größe zweiter Ordnung; mit wachsendem λ und μ wächst dagegen ξ in größerem Verhältnis. Helmholtz sieht also den Differenzton nur dann als sehr schwach

1) Mit dieser Begrenzung von b ist zugleich die eingangs berührte Konvergenzfrage erledigt; das Helmholtzsche Integral ist konvergent, wenn b so klein ist, daß der unsymmetrisch elastische Körper noch schwingungsfähig ist; die Grenze der Schwingungsfähigkeit und Konvergenz wird also um so früher erreicht, je größer A , d. h. je stärker die Elastizität in Anspruch genommen wird. Die Größe der Beanspruchung ist aber durch die rechte Seite der Gleichung (1), resp. durch Werte des Integrals derselben gegeben, wie das folgende zeigt.

gegen die Primärtöne an, wenn diese selbst sehr schwach sind. Aber diese Betrachtung erscheint nicht ausreichend, weil die Berücksichtigung der Größe des Faktors b unerlässlich ist.

Wir setzen also den in (6) enthaltenen Wert von b in (9) ein, und dann für a nach (8) den Wert $m r^2$; dann wird

$$\xi = \delta \frac{\lambda \mu r^2}{2A(p-q)^2}.$$

Weiter ist nach dem eben Gesagten $r^2/(p-q)^2$ ein sehr kleiner echter Bruch, den wir ε nennen wollen, und endlich sind A und μ (oder λ) Amplituden, die gegeneinander gehoben werden können, weil sie von derselben Größenordnung sind, so daß sich ergibt:

$$(10) \quad \xi = \frac{1}{2} \delta \varepsilon \lambda.$$

Da $\frac{1}{2} \delta \varepsilon$ ein Produkt dreier echter Brüche, und einer derselben noch dazu sehr klein ist, so ist bewiesen, daß die Amplitude der Differenztöne nach dieser Theorie sehr klein sein müßte gegen die der Primärtöne.

Fall 2. Der Körper gehe für $t = 0$ mit der Geschwindigkeit v_0 in positiver Richtung durch die Gleichgewichtslage. Dann ist

$$\text{für } t = 0 \quad x = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v_0,$$

also

$$x_0 = -\frac{a}{12}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_0 = -\frac{b}{6} v_0,$$

folglich

$$C = -\left(\frac{a}{6}\right)^3 + m\left(\frac{b v_0}{6}\right)^2,$$

so daß der unter dem Wurzelzeichen in (5) stehende Ausdruck übergeht in

$$4z^3 - \frac{a^3}{12} z - \left(\frac{a}{6}\right)^3 + m\left(\frac{b v_0}{6}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck muß nun wieder drei reelle Wurzeln haben, wenn der angenommene Körper schwingungsfähig sein soll. Nach den Gesetzen der kubischen Gleichungen findet man leicht, daß dies der Fall ist, wenn

$$m b^2 v_0^2 < \frac{a^3}{3},$$

also $b < \frac{a^3}{v_0 \sqrt{3m}}$ oder $b = \frac{\delta}{v_0} \sqrt{\frac{a^3}{3m}},$

worin wieder δ ein echter Bruch.¹⁾

Dies ist nun wieder in (9) einzusetzen; berücksichtigt man ferner wieder Gleichung (8), so erhält man:

$$\xi = \frac{\delta \lambda \mu r^3}{\sqrt{3} v_0 (p - q)^2}$$

Um für v_0 einen wahrscheinlichen Größenwert zu erhalten, erwäge man, daß die in Gleichung (1) einwirkende Beschleunigung $-\frac{g}{m} \sin q t$ die Geschwindigkeit $\frac{g}{m q} \cos q t$ hervorbringt, so daß, wenn die Bewegung von der extremen Lage aus gegangen wäre, der Nullpunkt mit der Geschwindigkeit

$v_0 = \frac{g}{m q}$ passiert werden würde. Mit Einsetzung dieses Wertes erhält man, da nach (9) $\mu = \frac{g}{m q^3},$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{3}} \frac{r^3}{q(p - q)^2} \lambda.$$

Mit Helmholtz können wir aber die Beträge

$$\frac{r}{q} = \varepsilon, \quad \frac{r^3}{(p - q)^2} = \zeta$$

als echte Brüche ansehen, von denen ζ sehr klein ist. Da hiernach

$$(11) \quad \xi = \frac{\delta \varepsilon \zeta}{\sqrt{3}} \lambda,$$

und $\delta \varepsilon \zeta / \sqrt{3}$ ein Produkt aus vier echten Brüchen ist, von denen einer sehr klein, so ergibt sich wiederum die Amplitude des Differenztones als sehr klein gegen die der Primärtöne.²⁾

1) Die vorstehende Gleichung wäre also zugleich die Konvergenzbedingung für die Helmholtzsche Integration bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_0 .

2) Die elliptische Funktion, welche die eigentliche Lösung der Gleichung (8) darstellt, lautet für Fall 1 und 2 in Weierstrassscher Form

$$z = p \left(\frac{t}{\sqrt{m}} - q \right),$$

worin q eine in beiden Fällen verschiedene Konstante ist. Für Fall 1

Was von den Amplituden gilt, gilt in noch viel höherem Grade von den *Intensitäten*. Die Tatsache, daß man mit so schwachen Tönen wie diejenigen verklingender Stimmgabeln den Differenzton ausgezeichnet hört, ist also mit der Helmholtzschen Theorie schlechterdings unvereinbar. Waetzmann meint freilich, man dürfe aus der Empfindungsstärke keine Schlüsse auf die physikalische Intensität ziehen. Welche Bedeutung dieser Einwand hat, läßt sich nunmehr gut übersehen. Die prächtigsten Differenztöne gibt der Königsche Apparat, welcher dieselben anhaltend hervorzubringen gestattet, und zwar durch Longitudinalschwingung zweier Glasröhren, die durch ein mit nassem Tuch bekleidetes Rad angestrichen werden. Beispielsweise hört man mit $f^4(2730\frac{2}{3})$ und $c^4(2048)$ den schönen und äußerst kräftigen Differenzton $f^2(682\frac{2}{3})$. Da es sich nur um Verhältnisse handelt, kann die Multiplikation mit 2π unterbleiben, also $p = 2730\frac{2}{3}$, $q = 2048$ gesetzt werden; r darf höchstens = 30 bis 40 angenommen werden; nehmen wir $r = 30$, so wird in Gleichung (11)

$$\varepsilon = \frac{30}{2048}, \quad \xi = \left(\frac{30}{682\frac{2}{3}}\right)^2;$$

δ wollen wir, da es 1 beliebig nahe kommen kann, zu ungünstigen Resultates = 1 setzen; dann ergibt sich $\xi : \lambda = 1 : 61174$, die Amplitude des Differenztones wäre also verschwindend klein

läßt sich die Funktion in eine gewöhnliche Amplitudenbeziehung umrechnen, nämlich (mit Wiedereinführung von x):

$$(12) \quad x = A - \frac{6H}{b} \sin^* \operatorname{am} \left(\frac{H}{\sqrt{m}} t \right),$$

worin

$$(13) \quad H = \frac{1}{4} \left(\frac{a}{2} + bA - \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{bA}{3}(a + bA)} \right).$$

Für Fall 2 würde der entsprechende Ausdruck noch viel verwickelter werden. Aus den Gleichungen (12) und (13) ergibt sich, daß die Schwingungen nicht um die Lage $x = 0$, sondern um eine nach der positiven Seite abgelenkte Lage erfolgen. Dies zeigt auch die Helmholtzsche Näherungsintegration, in welcher Glieder vorkommen, die von t unabhängig sind (vgl. Helmholtz, ges. Abhandlungen I. p. 261).

Die Ableitung der Weierstrassschen Funktionen, welche Gleichung (3) befriedigen, verdanke ich meinem verehrten Kollegen Herrn Prof. Schoenflies, der mich auch über die Bedingung belehrt hat, unter welcher dieselben eine periodische Bewegung bedeuten.

gegen die der Primärtöne, und das Intensitätsverhältnis wäre (mit Berücksichtigung der Schwingungszahlen) etwa $1:6 \cdot 10^{10}!$ Aber auch für die Noten von Stimmgabeln auf Resonanzkästen, z. B. h^1 und g^1 , deren Differenzton G beim Verklingen nicht viel früher erlischt, als die Primärtöne selbst, ergäbe sich ein Amplitudenverhältnis von $1:227$ und ein Intensitätsverhältnis von etwa $1:1,29$ Millionen! Auch mit unzulässig hohen Werten für r ergeben sich für hohe Primärtöne so verschwindend schwache Differenztöne, daß eine gleichzeitige Wahrnehmung derselben mit den ersten, geschweige denn eine annähernde Gleichschätzung, selbst für diejenigen ausgeschlossen erscheinen muß, welche jeden Parallelismus objektiver und subjektiver Intensität bestreiten; man müßte dann das Ohr als das trügerischste unserer Sinnesorgane betrachten. Übrigens fehlt für so weitgehende Annahmen jede tatsächliche Unterlage. Denn selbst M. Wiep, der die zur Minimalerregung nötige Energie für verschiedene Tonhöhen ungemein verschieden findet, gibt für die hier in Betracht kommenden Höhenlagen keine sehr großen Empfindlichkeitsverschiedenheiten an, und stets für die tieferen Töne geringere Empfindlichkeit, so daß dies hier gar nicht in Betracht kommen kann.

Ich habe ferner nachgewiesen (l. c.), daß das Trommelfell, welchem Helmholtz die für seine Theorie unentbehrliche Eigenschaft der unsymmetrischen Elastizität zuschreibt, für das Hören der Differenztöne keine Bedeutung hat. Dies wird zwar von Waetzmann nicht bestritten; er meint aber, man könne ebensogut den inneren Teilen des Ohres, z. B. dem Labyrinthwasser, asymmetrische Elastizität zuschreiben. Dies wäre aber nichts anderes als eine der Theorie zuliebe gemachte Hypothese ad hoc, während Helmholtz für seine Annahme eine tatsächliche Unterlage geltend machen konnte. Ich möchte noch darauf hinweisen, daß Gebilde dieser Art keinen festen Eigenton haben; denn aus den elliptischen Funktionen ergibt sich, daß die Schwingungsdauer von Größe und Vorzeichen der Anfangsamplitude oder Anfangsgeschwindigkeit abhängt.¹⁾ Auf

1) Für den Fall einer nicht linearen, aber doch symmetrischen Elastizität ($m \partial^2 x / \partial t^2 + ax + cx^3 = 0$) habe ich schon in der Arbeit

keinen Fall also könnten diejenigen Gebilde, welche als Resonatoren angesprochen werden, die von Waetzmann gemeinten Körper sein. (Für das Trommelfell würde, beiläufig bemerkt, die Eigenschaft, keinen festen Eigenton zu haben, nur vorteilhaft sein.)

Übrigens kann nicht nachdrücklich genug auf die große Unwahrscheinlichkeit hingewiesen werden, daß so leise Töne, wie sie zur Hervorrufung von Differenztönen genügen, auf Ohrgebilde wie das Trommelfell so stark einwirken sollten, daß die gewöhnliche Elastizitätsgleichung, nach welcher die Beschleunigung der Elongation einfach proportional ist, nicht gültig wäre.¹⁾ Man bedenke doch, daß die Amplituden der schwingenden Ohrteile bei sehr schwachen Tönen auf weniger als ein Milliontel Millimeter geschätzt werden, also auf weniger als $\frac{1}{600}$ Lichtwellenlänge.

Der von Waetzmann angeführte Umstand, daß es gelungen ist, objektive, auf Resonatoren wirkende Differenztöne zu erhalten, und daß in allen diesen Fällen unsymmetrische Elastizität schwingender Teile die Ursache sei²⁾, beweist offenbar

von 1891 (l. c. p. 508) die aus der Integration hervorgehende elliptische Funktion entwickelt, und darauf hingewiesen, daß die Schwingungszahl hier von der Anfangsamplitude abhängt; in unserem jetzigen Fall kommt aber noch die Abhängigkeit von deren Vorzeichen hinzu.

1) Waetzmann sagt (p. 76): „Bei unsymmetrisch elastischen Körpern genügen schon sehr kleine Amplituden, um höheren Potenzen der Elongation Einfluß auf die rücktreibende Kraft zu verschaffen.“ Welche theoretische Betrachtung diesem Ausspruch zugrunde liegt, ist mir unklar geblieben. Die Gleichung (1) oder (8) führt doch absichtlich eine höhere Potenz ein, um der Asymmetrie Ausdruck zu geben.

2) Einer der ausgezeichnetsten Akustiker, Lord Rayleigh (Theory of sound. 2. Ed. London 1896. 2. p. 459) findet sich mit dem Erfordernis unsymmetrischer Elastizität durch die Bemerkung ab, solche sei fast überall vorhanden; schon in der Luft bestehet sie durch die Abwechselung von Verdichtung und Verdünnung. Waetzmann dagegen hebt ausdrücklich hervor, daß in der Luft keine objektiven Kombinationstöne entstehen, ihre Elastizität also symmetrisch ist. Übrigens scheint mir hier Waetzmann schon deswegen im Recht zu sein, weil die Theorie des Schalles in Luft auf die angebliche Asymmetrie keine Rücksicht nimmt, und doch vortrefflich mit den Tatsachen stimmt.

nichts für die Annahme, daß das *Ohr* durch *eigene unsymmetrisch elastische Gebilde* Differenztöne erzeuge.

Es sei noch eine von mir ausgeführte Versuchsreihe kurz angeführt, über welche die ausführlichere Arbeit näheres enthält. Nach der Theorie müßte die Amplitude ξ des Differenztones dem Produkt $\lambda \mu$ der Amplituden der beiden Primärtöne proportional sein (vgl. Gleichung 7 oder 9). Mittels einer sehr wirksamen Telephonsirene konnte ich einem in einem entfernten Zimmer befindlichen Hörtelephon gleichzeitig zwei Töne zuführen, die eine kleine Terz bildeten und im Anfang der dreigestrichenen Oktave lagen. Das Intensitätsverhältnis beider Töne konnte in weitem Bereich durch Einschaltung von Widerständen im Nebenschluß variiert werden. Schon wenn beide Töne sehr schwach sind, hört man deutlich den Differenzton. Wird dann einer der beiden Töne wesentlich verstärkt, so verschwindet der Differenzton vollkommen. Kurz ausgedrückt heißt dies: bei sehr ungleicher Stärke der Primärtöne hört man keinen Differenzton, während man ihn sehr gut hört, wenn der stärkere Ton auf die Intensität des schwächeren herabgedrückt wird. Mit der Helmholtzschen Theorie ist dies Resultat aus dem angegebenen Grunde unvereinbar; denn sie verlangt im Gegenteil, daß mit Verstärkung des einen Primärtones der Differenzton ebenfalls verstärkt wird.

Dagegen würde sich das Resultat höchst ungezwungen aus dem Prinzip erklären, welches vor Aufstellung der Helmholtzschen Theorie allgemein anerkannt wurde, daß nämlich das Ohr die durch Superposition zweier Töne hervorgebrachten Amplitudenschwankungen bei geringer Frequenz als Schwingungen, bei hinreichend großer als Ton wahrnimmt. Um den letzterwähnten Versuch sofort zu begreifen, braucht man nur die resultierende Kurve zweier Sinusschwingungen vom Periodenverhältnis 4:5 oder 3:4 zu konstruieren, und zwar einmal mit gleichen, einmal mit sehr verschiedenen Amplituden (etwa wie 1:10; in der ausführlicheren Arbeit sind zwei so gewonnene Kurven abgedruckt). Man erkennt sofort, daß die Intensitätsperiodik bei gleichen Amplituden sehr stark, bei ungleichen nicht merklich hervortritt. Wie hier das Auge, könnte sich auch das Ohr verhalten.

Obwohl die Herleitung der Differenztöne aus asymmetrischer Elastizität schwingender Ohrgebilde, insbesondere des Trommelfells, unmöglich erscheint, läßt sich schwer eine andere der bisher aufgestellten Theorien an ihre Stelle setzen. R. König schreibt dem Ohr die Eigenschaft zu, jede Periodizität von hinreichender Frequenz als Ton wahrzunehmen. Diese Vorstellung aber, abgesehen davon, daß sie darauf verzichtet, das Heraushören einzelner Töne aus einem Tongemisch zu erklären (was anscheinend nur eine Zerlegungstheorie wie die Helmholtzsche vermag), steht mit folgender Tatsache in direktem Widerspruch: Bei zwei gleichzeitigen Tönen von p und q Schwingungen in der Zeiteinheit hört man stets den Differenzton $p - q$, obwohl die Periodenzahl nur in denjenigen Fällen $p - q$ ist, wo $p : q = n : n - 1$.¹⁾ Nur in diesen Fällen, z. B. bei der Quint (2 : 3), der Quart (3 : 4), der großen Terz (4 : 5) usw. ist die Zeit zwischen zwei Stößen identisch mit einer wirklichen Periode des resultierenden Vorgangs, keineswegs aber bei anderen Verhältnissen (z. B. 3 : 5, 5 : 8). Bei den Tönen c^3 (1024) und a^3 (1706 $\frac{2}{3}$) wäre beispielsweise die Periodenzahl $341\frac{1}{3}$ (f^1), weil $341\frac{1}{3}$ der größte gemeinsame Teiler der beiden Schwingungszahlen ist; man hört aber (am Harmonium) niemals diesen Ton, sondern immer nur den Differenzton f^2 (682 $\frac{1}{3}$), d. h. das Ohr nimmt nicht die Anzahl der Perioden, sondern die Anzahl der Schwingungsmaxima wahr.

Aber auch die alte Ansicht von Lagrange, daß die Schwebungen bei zunehmender Frequenz zum Differenzton verschmelzen, eine Ansicht, der ich selbst lange angehangen habe, widerspricht einer leicht zu bestätigenden Tatsache. Schon Helmholtz fiel es auf, daß sehr frequente Schwebungen (weit über 100 pro Sek.) noch getrennt als Schwirren oder Rauhigkeit empfunden werden, ohne zu einem Tone zu verschmelzen, obwohl schon einige 30 Schwingungen pro Sekunde

1) Ist n der größte gemeinsame Teiler der Zahlen p und q , so wiederholt sich n mal in der Zeiteinheit genau derselbe Vorgang, d. h. es erfolgen n Perioden. Stöße erfolgen jedoch, so oft der eine Ton den anderen um eine ganze Schwingung überholt hat, d. h. $p - q$ mal in der Zeiteinheit. Nach $1/(p - q)$ Sek. kehrt stets dieselbe Phasendifferenz wieder, aber nicht dieselbe Phase; letzteres, d. h. ein Zusammenfallen der Stoßperiode mit der wahren Periode, tritt nur dann ein, wenn $p - q = n$, d. h., da $p = \alpha n$, $q = \beta n$, wenn $\alpha - \beta = 1$.

genügen, um einen Ton zu geben. Stumpf¹⁾ gibt sogar an, noch bei über 400 Stößen pro Sekunde eine Rauigkeit zu hören.

Ich höre aber am Harmonium mit den Noten b^3 und c^4 neben dem von Helmholtz beschriebenen Schwingen sehr deutlich auch den Differenzton c (128). Noch viel frappanter ist diese Doppelwirkung an dem schon erwähnten Königlichen „Apparat für Stoßtöne“, dessen longitudinal schwingende Glasröhren von c^4 bis e^6 reichen, und zu dem ich noch eine Anzahl Töne zwischen c^4 und d^4 hinzufügte, dergestalt, daß ich die verschiedensten Schwingungsfrequenzen von etwa 40 bis über 200 hervorbringen konnte. Im größeren Teile dieses Bereiches hört man nun neben dem dröhnen den Differenzton ungemein deutlich das Schwingen der Stoße. Erst bei Stoßzahlen über 170 erscheint für mein Ohr der Differenzton allein, und unterhalb etwa 50 die Schwingungen allein.

Wenn nun in dem angeführten Bereich derselbe Vorgang zwei so verschiedene Wirkungen hat, so muß man schließen, daß unmöglich die Differenztöne verschmolzene Schwingungen sein können; vielmehr müssen beide Empfindungen durch ganz verschiedene Sinnesapparate hervorgebracht werden, was für die Ansicht von Helmholtz spricht, daß die Schwingungen auf gleichzeitiger Erregung eines zwischenliegenden Resonators beruhen, während der Differenzton so wahrgenommen wird wie jeder Ton.

Helmholtz hat bekanntlich gefunden, daß die Differenztöne der *Doppelsirene* und des *Harmoniums* durch Resonatoren verstärkt werden, also einen objektiven Anteil haben, den er in bekannter Weise von Druckschwankungen in dem gemeinsamen Windraum herleitet. Besonders für das Harmonium schien es mir zweifelhaft, ob wirklich das Spiel einer durchschlagenden Zunge Druckschwankungen bewirkt, welche im Abstand der zweiten Zunge noch stark genug sind, um im Sinne der Helmholtzschen Theorie zu wirken.²⁾ Außerdem hat letztere das

1) C. Stumpf, *Tonpsychologie* 2. p. 461 ff. Leipzig 1890.

2) An dem Harmonium des Instituts hält die Note d^3 (576) nach Aufhören des Tretens noch 45 Sek. in konstanter Stärke an, es entleert sich also bei jeder Zungenschwingung nur $\frac{1}{45.576}$, d. h. etwa $\frac{1}{26000}$ des

große Bedenken, daß sie ebensostarke Summations- wie Differenztöne ergibt, was entschieden den Tatsachen widerspricht.¹⁾ Bestärkt wurde ich in meinen Bedenken durch die unerwartete Erfahrung, daß die Doppelsirene, von der mir zwei Exemplare zur Verfügung stehen, eine mit schiefen und eine mit senkrechten Bohrungen (letztere für Motorbetrieb), in vielen Fällen, auch wenn beide Töne von demselben Windkasten produziert wurden, keinen objektiven Differenzton gab, während das Harmonium, das theoretisch ungünstigere Bedingungen bietet, völlig regelmäßig wirkt. Ich versuchte nun am Harmonium, ob wirklich der gemeinsame Windraum für die Entstehung objektiver Differenztöne Bedingung ist. Zu diesem Zwecke wurde das Harmonium, welches zwei getrennte Register hat, so abgeändert, daß die beiden Primärtöne von vollständig *getrennten Windhäusern* produziert wurden; das nähere ist in der ausführlicheren Arbeit zu finden. Auch jetzt wurden die Differenztöne durch den zugehörigen Resonator verstärkt, nicht aber (wie schon Helmholtz angibt), wenn beide Primärtöne auf zwei Harmonien verteilt wurden. Man muß hieraus schließen, daß objektive Differenztöne zustande kommen, *wenn zwei Schwingungen einer gemeinsamen Masse, namentlich einem Holzkörper, direkt zugeführt werden.*

Hierdurch geleitet versuchte ich weiter, ob der Königliche Apparat für Longitudinalschwingungen (vgl. oben), dessen mächtige Differenztöne nie einen Resonator erregen, dies tun, wenn die beiden Glasröhren, statt an getrennten, an einem Eisen-

Windvorrats; daß dies in 3—7 cm Abstand an der zweiten Zunge noch die theoretisch vorausgesetzte Druckschwankung bewirkt, erscheint zweifelhaft. An der Doppelsirene betragen die abwechselnd freigegebenen Öffnungen sehr viel als die spaltförmigen einer Zunge, nämlich bei 12 Löchern zu 4 mm Durchmesser eine Öffnung von 14 mm Durchmesser, und die zweite Löcherreihe steht unter Umständen nur 2—3 mm ab in einer Umfangsstrecke bis zu 200 mm Länge; hier sind also, auch abgesehen von der Heftigkeit der Luftbewegung, die Verhältnisse der Theorie günstig, am Harmonium entschieden nicht.

1) In der von Helmholtz aufgestellten mathematischen Form, welche übrigens von ihm selbst nur als eine Annäherung bezeichnet wird, würde die Theorie außerdem verlangen, daß die Kombinationstöne die halbe Amplitude der Primärtöne haben. Dieser Einwand kann aber durch eine geringe Modifikation der Theorie beseitigt werden.

rahmen aufgehängten hölzernen Backen, direkt an einem *gemeinsamen Holzbrett* befestigt sind. Diese Umänderung konnte auf sehr einfachem Wege (vgl. die ausführliche Mitteilung) bewerkstelligt werden, und ergab *zweifellose objektive Differenztöne*.

An Saiteninstrumenten mit gemeinsamem Resonanzkörper (Geige, Klavier) konnten objektive Differenztöne nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden, wie diese Instrumente überhaupt für Erzeugung von Differenztonen relativ wenig geeignet scheinen, eine noch aufzuklärende Tatsache. Dagegen erhielt ich sehr sichere Ergebnisse an *Stimmgabeln*. Schon Waetzmann¹⁾ erhielt verstärkte Differenztöne, wenn er zwei tönende Stimmgabeln mit ihren Stielen aneinander drückte, konnte jedoch eine Objektivität jener Töne nicht sicher feststellen. Ich selbst schraubte, im Anschluß an die Versuche am Königlichen Apparat, zwei Stimmgabeln auf ein großes, auf Holzfüßen stehendes Brett aus Tannenholz von 1 cm Dicke. Beim Anstreichen der Gabeln mit dem Bogen entstand jedesmal ein objektiver Differenzton, wie der Kugelresonator erwies. Wurden die Gabeln auf einen hölzernen Resonanzkasten geschraubt, der auf den Differenzton abgestimmt war, so sprach zwar der Kugelresonator nicht stärker an, als mit dem einfachen Brett, jetzt hörte man aber den Differenzton sehr kräftig aus dem Kasten erklingen, wenn man das Ohr seiner Mündung nähert. Am besten eignen sich zu diesen Versuchen die Gabeln der zweigestrichenen Oktave.

Einen anderen Fall, in welchem bei gleichzeitiger Beeinflussung eines starren Körpers durch zwei Töne objektive Differenztöne entstehen, hat schon Schaefer gefunden.²⁾ Er verband ein sogenanntes Stentormikrophon mit einem Stentortelephon, und ließ vor dem ersten zwei Töne mit Pfeifen oder Stimmgabeln produzieren; die Differenztöne erregten den Resonator. Ich habe diesen Versuch mit demselben Resultat wiederholt; besonders schön gelingt er mit Stimmgabeln auf Resonanzkästen, deren Mündungen man dicht an den Mikrophontrichter hält. Auch mit der oben p. 706 erwähnten

1) E. Waetzmann, Ann. d. Phys. 20. p. 843. 1906.

2) K. L. Schaefer, Ann. d. Phys. 17. p. 572 ff. 1905.

Telephonsirene, deren beide, um eine kleine Terz differente Töne unter Einschaltung einer geeigneten Transformation dem Stentortelephon zugeführt wurden, gelang der Versuch.

Es könnten nun zunächst Zweifel darüber entstehen, ob das Mitschwingen eines Resonators ein sicherer Beweis für die Existenz eines objektiven Tones ist; wenigstens ist kürzlich von Waetzmann die Möglichkeit diskutiert worden, daß die dem Differenzton zugrunde liegenden Maxima und Minima einen auf ihre Periode abgestimmten Resonator zum Mitschwingen bringen.¹⁾ Helmholtz hat offenbar dies für unmöglich gehalten; sonst hätte er ja einfach das Hören der Differenztöne auf diesem Wege dem entsprechenden Ohrresonator zuschreiben können. In der Tat scheint mir diese Möglichkeit mit dem Resonanzprinzip völlig unvereinbar²⁾, und ich habe früher direkte Versuche angestellt, welche gegen sie entschieden haben.³⁾ Neuerdings habe ich über dieselbe Frage Modellversuche mit einem schweren Pendel angestellt (vgl. die ausführlichere Mitteilung), welche vollkommen klar ergeben haben, daß symmetrische Einwirkungen auf einen schwingungsfähigen Körper, von anderem Tempo als dessen Eigenperiodik, welche ihn also nicht in Mitschwingung versetzen, dies auch dann nicht tun, wenn ihre Stärke im Tempo jener Eigenperiode auf- und niederschwankt. Dagegen tritt Mitschwingen durch asymmetrische Einwirkungen von beliebigem Tempo ein, wenn deren Stärke in der Periodik des anzusprechenden Körpers oszilliert. Dies ist auch leicht verständlich: denn symmetrische Einwirkungen pendelfremder Frequenz haben die resultierende Wirkung Null, und diese kann nicht durch pendelgemäße Größenschwankungen wirksam werden; asymmetrische pendelfremde Einwirkungen haben dagegen als resultierenden Effekt eine einseitige Ablenkung zur Folge, so daß ihre pendelgemäße Größenschwankung dem Resonanzprinzip entsprechend

1) E. Waetzmann, l. c. 20. p. 844 f. 1906.

2) Am kürzesten kann man dies wohl so begründen, daß zur Anspruchsnahme eines schwingungsfähigen Körpers Kräfte von bestimmten Richtungen nötig sind, also Schwankungen der Intensität eines symmetrisch oszillatorischen Vorganges, welche keine Vektorgröße ist, effektlos bleiben müssen.

3) L. Hermann, Archiv f. d. ges. Physiologie 49. p. 516, 518. 1891.

wirkt. Also dürfen wir als sicher annehmen, daß bloße Maxima und Minima eines oszillatorischen Vorganges einen zu ihrer Periodik passenden Resonator nur dann ansprechen können, wenn entweder der Vorgang selbst oder die Elastizität des Resonators asymmetrisch ist.¹⁾ Dies anzunehmen liegt aber bei den in Rede stehenden akustischen Versuchen kein Grund vor.

Hiernach scheint es festgestellt, daß in vielen Fällen starre Massen, namentlich von Holz, in sich objektive Differenztöne erzeugen, wenn ihnen gleichzeitig zwei Schwingungen mitgeteilt werden. Offenbar wird dies darauf zurückzuführen sein, daß in starren Körpern *keine reine Koexistenz* der Schwingungen stattfindet, wenn auch im großen und ganzen eine solche angenommen werden darf. Die Wirkungen starrer Resonanzböden sind überhaupt bisher theoretisch kaum untersucht; auch die folgenden Bemerkungen mache ich *unter allem Vorbehalt*; die Aufklärung der Vorgänge in solchen starren Körpern bei Mitteilung von Schwingungen muß einem Fachmann der theoretischen Akustik überlassen bleiben. Die sogenannten Resonanzböden werden allerdings, wie in den Lehrbüchern angegeben wird, hauptsächlich die ihnen mitgeteilten Töne günstig an die Luft übertragen. Dies schließt aber nicht aus, daß sie *daneben* durch Störung der einfachen Superposition neue objektive Töne, wie die Kombinationstöne, erzeugen. Ich wüßte wenigstens nicht, auf welchem anderen Wege man die Erscheinungen am Harmonium mit getrennten Windkästen, sowie viele andere von Schaefer, Waetzmann und mir gemachte Beobachtungen erklären will. Es scheint sogar, daß auch in der Luft bei besonders starken Schwingungen objektive Kombinationstöne durch Superpositionsstörungen zustande kommen können. Besonders für die Doppelsirene mit ihren heftigen Wirbelbildungen wird dieses Moment neben dem von Helmholtz hervorgehobenen in Frage kommen. Weiter in den Erklärungsversuchen zu gehen, dürfte vor der Hand unmöglich sein. Jedoch darf darauf hingewiesen

1) Wir sind hier durch Anschauung in etwas allgemeinerem Sinne zu demselben Ergebnis gelangt, auf welches die Helmholtzsche Integration der Gleichung (1) für den speziellen Fall der aus dem Zusammenklang zweier Töne hervorgehenden Maxima und Minima geführt hat.

werden, daß in starren, nicht vollkommen homogenen Körpern, namentlich in trockenem Holz, zweifellos mannigfache und unübersehbar verwickelte Zwangszustände herrschen, die auf das elastische Verhalten Einfluß haben müssen. Fast sicher wird hierdurch an vielen Stellen die Elastizität *unsymmetrisch* sein.¹⁾ Solche Stellen würden aber nach dem soeben an der Hand von Modellversuchen Entwickelten durch periodische Maxima und Minima in Schwingungen versetzt werden, also objektive Differenztöne erzeugen können. Auch könnte hier vielleicht die Helmholtzsche Theorie Anwendung finden, welche oben in ihrer Anwendung auf das Trommelfell bekämpft werden mußte; die auf die Größenverhältnisse gegründeten Einwände fallen hier vollständig fort, da die Kombinationstöne hier überhaupt nur als eine Art Nebenprodukt besonders gearteter Stellen auftreten, und keine bestimmte quantitative Beziehung zum Haupteffekt des Resonanzkörpers haben. Allerdings bringt jene Theorie nicht genügend zum Ausdruck, daß zur Erzeugung von Differenztönen ausgesprochene Maxima und Minima der Intensitäten erforderlich sind, wie die vorgetragene Anschauung und der oben p. 706 angeführte Versuch ergeben.

Bei dieser Entstehungsart der Kombinationstöne muß die Möglichkeit erwogen werden, daß auch im *Schädel* durch gleichzeitige Einwirkung zweier Töne ein objektiver Differenzton entsteht, welcher trotz seiner gewiß außerordentlichen Schwäche infolge der wunderbar großen Empfindlichkeit des Ohres und durch seine unmittelbare Einwirkung zur Wahrnehmung gelangt. Freilich kann man gegen diese Möglichkeit die oben p. 705 angeführte Betrachtung anführen. Es sei hier auf eine Erfahrung hingewiesen, die ich schon vor längerer Zeit mitgeteilt habe.²⁾ Man hört den Differenzton sehr gut, wenn man zwei angestrichene oder angeschlagene Stimmgabeln mit ihren Stielen an die Zähne drückt, mögen die Gehörgänge offen oder

1) Zur Erklärung des Telephonversuchs könnte herangezogen werden, daß der Magnet eine Asymmetrie der Elastizität der Eisenplatte bedinge. Aber ich bezweifle, ob überhaupt genügende Transversalschwingungen der letzteren stattfinden, um diesen Umstand wirken zu lassen, und glaube, daß auch hier die molekularen Schwingungen innerhalb des starren Körpers den im Texte angegebenen Einflüssen unterliegen.

2) L. Hermann, Archiv f. d. ges. Physiol. **49**. p. 512 f. 1891.

verstopft sein, also auch bei völligem Ausschluß des Trommelfells. Damals benutzte ich die Gabeln der eingestrichenen Oktave. Ich habe jetzt, wo mir auch die Gabeln der zweigestrichenen Oktave zur Verfügung stehen, den Versuch auch mit diesen angestellt, und finde diese Differenztöne ganz außerordentlich stark, was mich in der Annahme bestärkt, daß sie in der angedeuteten Weise im Schädel entstehen könnten.

So würden wir denn zu der von Helmholtz und, wenn auch in ganz anderem und meiner Überzeugung nicht entsprechenden Sinne, von Schaefer¹⁾ ausgesprochenen Meinung gelangen, daß es überhaupt nur eine Art von Kombinationstönen, d. h. objektive gibt.

Für die Physiologie des Ohres würde durch diese Auffassung der Kombinationstöne jeder Widerspruch derselben gegen die Helmholtzsche Theorie der Tonempfindungen hinweggeräumt sein; diese Töne würden so wie jeder andere objektive Ton zur Wahrnehmung gelangen. Bekanntlich gibt es noch andere Schwierigkeiten für diese Theorie, auf welche einzugehen jedoch hier nicht der Ort ist.²⁾ Es ist zu hoffen, daß diese schöne Theorie schließlich siegreich bleiben wird; aber das läßt sich schon jetzt mit Sicherheit behaupten, daß die bisherigen Versuche, die Theorie in den anatomischen Gebilden der Schnecke spezieller verwirklicht zu erblicken, ohne Ausnahme verfehlt sind; vielleicht sind die Resonatoren überhaupt keine Gebilde von mechanischer Elastizität.³⁾

Königsberg i. Pr., Physiologisches Institut.

1) K. L. Schaefer, Archiv f. d. ges. Physiol. 78. p. 526. 1900. Schaefer suchte eine Entstehung objektiver Kombinationstöne im Ohr aus ähnlichen Ursachen abzuleiten, wie sie Helmholtz für die entsprechenden Vorgänge an Doppelsirene und Harmonium angenommen hat.

2) Besonders wichtig und noch nicht erledigt ist der von M. Wien erhobene Einwand, Festschrift für Wüllner p. 28—35. 1905.

3) Vgl. meine Ausführungen im Archiv f. d. ges. Physiologie 56. p. 497 f. 1894.

(Eingegangen 12. Februar 1908.)

4. Zur Frage der Beugung der Röntgenstrahlen; von B. Walter und R. Pohl.

(Hierzu Taf. V, Figg. 1 u. 2.)

Die Herren Haga und Wind haben in mehreren Abhandlungen den Nachweis zu führen gesucht, daß die Röntgenstrahlen — ebenso wie diejenigen des Lichtes — einer Beugungsfähig sind; und ihre Versuche werden auch in neuerer Zeit vielfach als ein endgültiger Beweis für das Vorhandensein dieser Erscheinung angesehen. Demgegenüber glauben wir nun aber darum zu können, daß die von den genannten Beobachtern einer Beugung der Strahlen zugeschriebenen Erscheinungen sämtlich auf ganz andere Ursachen zurückzuführen sind, und daß demnach bis jetzt irgend ein experimenteller Anhalt für eine Beugung dieser Strahlengattung nicht vorhanden ist.

Die erste Veröffentlichung von Haga und Wind stammt aus dem Jahre 1899¹⁾; und die damals von ihnen benutzte Versuchsanordnung war kurz die folgende. Von den Strahlen einer Röntgenröhre wurde durch einen Spalt, der 14, 18 oder $25\text{ }\mu$ weit gemacht wurde, und dessen Höhe 1 cm betrug, ein schmales Bündel ausgeblendet. Dieses fiel in 75 cm Abstand auf einen zweiten Spalt, den sogenannten Beugungsspalt, dessen Höhe 3 cm war, und dessen Weite sich von 14 bis zu einigen μ keilförmig verjüngte. Zumeist in 75 cm Abstand hinter dem Beugungsspalt war ferner eine photographische Platte angebracht, auf der nach Belichtungszeiten von 29—200 Stunden Bilder dieses Spaltes erzeugt wurden. Diese „Beugungsbilder“, von denen eines, welches sich auf eine Spaltweite von oben 10 und unten 6 μ bezieht, nach der Originalabhandlung in Fig. 1, Taf. V, in etwa 14 facher Vergrößerung wiedergegeben ist, zeigten an einigen Stellen, von denen diejenige der Fig. 1 durch einen Pfeil gekennzeichnet ist; schwache seitliche Verbreiterungen, welche die Beobachter eben nicht anders als durch eine

1) H. Haga u. C. H. Wind, Kon. Akad. te Amsterdam, 25. April 1899 und Wied. Ann. 68. p. 884. 1899.

Beugung der zur Darstellung des Bildes benutzten Röntgenstrahlung erklären zu können vermeinten. Aus den Abständen, sowie den zugehörigen Weiten des Beugungsspaltes ermittelten sie für die Wellenlängen der Strahlen in erster Annäherung Werte zwischen 0,012 und 0,27 $\mu\mu$, während Hr. Sommerfeld nach einer etwas anderen Theorie aus der deutlichsten ihrer Verbreiterungen $\lambda = 0,18 \mu\mu$ berechnete.¹⁾

Die Versuche wurden später von Walter²⁾ in erheblich vervollkommneter Weise wiederholt, indem er zunächst die Weite des ersten Spaltes auf 9μ verengerte, ferner zweitens die beiden Spalte und die photographische Platte zusammen auf eine starre Eisenschiene setzte und endlich drittens eine viel stärkere Strahlung (Wasserkühlrohren) und daher erheblich kürzere Expositionszeiten anwandte. Die erhaltenen Bilder, von denen eines, welches sich auf ungefähr die gleichen Spaltweiten und Abstände wie das der Fig. 1 bezieht, in Fig. 2, Taf. V, in gleicher Vergrößerung abgebildet ist, wiesen — trotz ihrer viel größeren Schärfe — doch in keinem Falle jene lokalen Verbreiterungen auf, aus denen Haga und Wind auf eine Beugung geschlossen hatten, und Walter kam deswegen zu der Ansicht, daß jene Unregelmäßigkeiten lediglich auf die ungleichmäßige Empfindlichkeit der photographischen Schicht der Haga und Windschen Originalaufnahmen zurückzuführen seien. Dieselbe Erscheinung könne man nämlich in kleinerem Maßstabe fast auf jeder derartigen Aufnahme beobachten; und das verhältnismäßig starke Auftreten derselben bei den Bildern der genannten Beobachter erkläre sich ungezwungen durch die übermäßig lange photographische Entwicklung, welche die Verfasser für ihre Aufnahmen für nötig erachtet hatten. Walter selbst hatte nämlich seine Platten stets nur so lange entwickelt, bis in den nicht belichteten Teilen derselben die ersten Spuren des Schleiers auftraten.

Diese Erklärung der lokalen Verbreiterungen der ersten Bilder von Haga und Wind darf jetzt wohl für um so sicherer gelten, als auch die neueren Aufnahmen dieser Beobachter, die ganz nach Art der Walterschen hergestellt

1) A. Sommerfeld, Physik. Zeitschr. 1. p. 105. 1900 u. 2. p. 58. 1901.

2) B. Walter, Physik. Zeitschr. 3. p. 157. 1902.

wurden, und auf die wir sogleich näher eingehen werden, in keinem Falle eine solche Verbreiterung zeigen; und wenn daher diese Erscheinung in der von Wind herrührenden schematisierten Form¹⁾ noch gegenwärtig sogar in Lehrbüchern²⁾ abgebildet wird, so ist dies nach unserem Dafürhalten in keiner Weise durch die Versuche gerechtfertigt.

Kommen wir sodann zu den neueren Versuchen von Haga und Wind³⁾, die in Veranlassung des Walterschen Einspruches gegen ihre ersten Aufnahmen unternommen wurden, so benutzten nun die Beobachter für die drei Aufnahmen, mit denen sie sich diesmal begnügten, stets dieselben beiden Spalte, von denen der zweite, der Beugungsspalte, sich — bei einer Länge von 4 cm — von 27μ bis zum vollständigen Schlusse verjüngte, während die Weite des ersten Spaltes stets 15μ betrug. Die Entfernungen blieben die früheren.

Die aufgenommenen „Beugungsbilder“ zeigten nun diesmal zwar nicht, wie erwähnt, jene lokalen Verbreiterungen der früheren, dafür aber glaubten die Verfasser jetzt für das letzte Ende derselben, da, wo sie die Weite ihres Beugungsspaltes von $8-3,5\mu$ abnehmend angeben, eine ziemlich plötzlich einsetzende und auch ganz außerordentlich rasch zunehmende Verbreiterung dieser Bilder feststellen zu können, während die letzteren für das Gebiet von $27-8\mu$ Spaltweite hin nahezu die von der rein geometrischen Theorie, d. h. ohne Berücksichtigung von Beugung, verlangte Keilform zeigen sollten.

Zur besseren Übersicht haben wir die Haga und Windschen Ausmessungen ihrer genannten drei Bilder in umstehender Fig. 3 durch die drei punktierten Kurven wiedergegeben, während die ausgezogene Linie derselben die sich bei rein geometrischem Strahlengang ergebende Breite des Bildes darstellt. Von den an der Abszisse der Figur angeschriebenen Zahlenreihen gibt die obere die von Haga und Wind zur Orientierung auf ihren röntgenographischen Aufnahmen des

1) C. H. Wind, Physik. Zeitschr. 2. p. 298. 1901.

2) Vgl. z. B. J. J. Thomson, „Elektrizitätsdurchgang in Gasen“. Deutsch von E. Marx, Leipzig 1906. p. 546.

3) H. Haga u. C. H. Wind, Kon. Akad. te Amsterdam, 22. Oktober 1902; Ann. d. Phys. 10. p. 305. 1903.

Beugungsspaltes¹⁾ angebrachten Teilstrichmarken und die untere die zugehörigen Weiten dieses Spaltes an. Die Ordinaten der Fig. 3 endlich stellen die gemessenen bzw. berechneten Breiten der „Beugungsbilder“ dar.

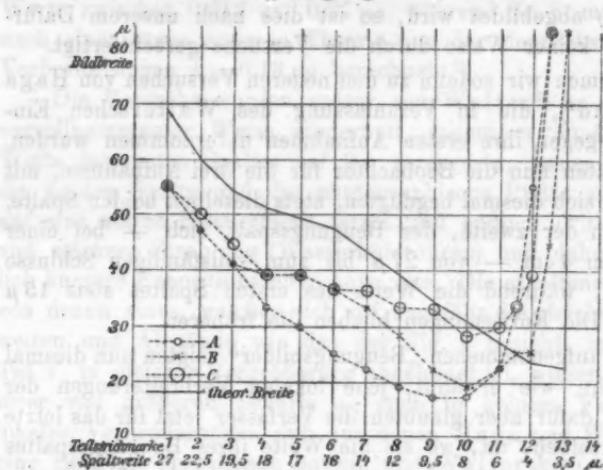


Fig. 3.

Der Vergleich der drei punktierten mit der ausgezogenen Kurve der Fig. 3 zeigt nun sofort, daß nach den Messungen der Beobachter in ihren drei in Rede stehenden Beugungsaufnahmen von einer Spaltweite von etwa 6μ an plötzlich eine ganz gewaltige Verbreiterung des Beugungsbildes einsetzt, eine Verbreiterung, die, wenn sie der Wirklichkeit entspräche, natürlich kaum anders als durch eine Beugung der Strahlen zu erklären sein würde, wenn es allerdings auch schon sehr auffällig wäre, daß diese Erscheinung hier plötzlich in so un-

1) Diese „Spaltaufnahmen“, die im Gegensatz zu den „Beugungsaufnahmen“ nur den Zweck haben, die genaue Gestalt des Beugungsspaltes kennen zu lernen, werden in der Weise hergestellt, daß die photographische Platte — bei unveränderter Stellung des ersten und zweiten Spaltes — möglichst dicht hinter letzterem angebracht und also dieser mit einem X-Strahlenbündel vom derselben Art abgebildet wird wie dasjenige ist, mit welchem auch das Beugungsbild hergestellt wird. Diese Art der Spaltausmessung ist jedoch, wie weiter unten gezeigt werden wird, nicht ganz zuverlässig.

geheurem Maßstabe einsetzt. Es läßt sich nun aber leicht der Nachweis führen, daß jene Verbreiterung in den fraglichen Bildern tatsächlich gar nicht vorhanden, sondern den Beobachtern lediglich durch eine optische Kontrastwirkung vorgetäuscht worden ist.

Um sich hiervon zu überzeugen, hat man nur auf ein Stück weißes Papier einen geradlinigen, schwarzen Strich von ungefähr $\frac{1}{4}$ mm Breite zu ziehen und auf diesen eine jener 17 fachen Vergrößerungen zu legen, welche Haga und Wind selbst von ihren in Rede stehenden Beugungsbildern auf photographischen Platten hergestellt und auch nach verschiedenen Seiten hin verschickt haben. Der schwarze Strich muß dabei möglichst durch die Mitte des Spaltbildes — bis zu seinem letzten Ende hin — gehen und ferner die Platte auch ein wenig gegen das Papier angedrückt werden, so daß Strich und Spaltbild möglichst zusammenfallen. Dann erscheint die in Rede stehende pinselartige Verbreiterung des letzten Endes dieser Bilder plötzlich wie weggeblasen, während demgegenüber der entsprechende Randschleier in den oberen Teilen der Bilder mit solcher Deutlichkeit hervortritt, daß dieselben hier auch ohne Messung sofort erheblich breiter erscheinen als unten.

Damit aber ist nun auch die von den Beobachtern so sehr vermißte Keilform ihrer Bilder — soweit wenigstens eine solche hier überhaupt erwartet werden kann — durchaus gewahrt; und eine Notwendigkeit aus ihren letzten Aufnahmen auf eine Beugung der Röntgenstrahlen zu schließen, liegt also nicht vor.

Was aber ferner die Ursache jener optischen Täuschung anbetrifft, welche die Veranlassung dazu war, daß Haga und Wind für das obere Ende ihrer Beugungsbilder eine viel zu geringe Breite maßen, so ist dieselbe darin zu suchen, daß hier der schwache Randschleier des Bildes gegenüber dem sehr kräftigen Kern desselben leicht übersehen wird, während man in den unteren Teilen des Bildes, wo der letztere fehlt, den ersten natürlich auch stets in seiner ganzen Breite ausmisst. Bringt man jedoch jenen Kern nach der oben angegebenen Methode auch für die oberen Teile des Bildes zum Verschwinden, so tritt der Randschleier auch hier sofort in seiner ganzen Größe hervor.

Mit dieser Auffassung der Haga und Windschen Bilder stimmen übrigens auch die geometrischen Grundlagen derselben auf das beste überein; denn nach den oben angegebenen Spaltweiten und Entfernung ergibt sich, daß der Kernschatten ihrer Bilder sich bis etwa $7,5 \mu$ Spaltweite hinab erstreckte; und gerade von dort ab beginnt nun auch die von den Beobachtern an ihren Bildern gemessene Verbreiterung.

Eine besondere Diskussion verlangen ferner noch die Unterschiede, welche Haga und Wind bei ihren drei in Rede stehenden Bildern gefunden haben; und zwar um so mehr, als sie daraus sogar auf eine verschiedene Wellenlänge der harten und weichen Röntgenstrahlen schließen. Wir werden indessen sehen, daß auch diese Unterschiede sich von unserem Gesichtspunkte aus ganz einfach erklären.

Die letzteren selbst bestehen darin, daß bei den drei Aufnahmen *A*, *B* und *C* der Beobachter die von ihnen gemessene Verbreiterung nicht an derselben Stelle, sondern bei bzw. der Teilstrichmarke $10\frac{1}{3}$, 12 und 11 ihres Spaltbildes, entsprechend einer Spaltweite von bzw. 7 , 4 und 6μ , beginnt, so daß sie demnach auch für die dem Beginne der Verbreiterung entsprechenden Wellenlänge bzw. $0,16$, $0,05$ und $0,12 \mu\mu$ berechnen. Und da nun ferner die Aufnahmen *A* und *C* nach ihren Angaben in der Hauptsache mit weichen, *B* dagegen vorzugsweise mit harten Röntgenstrahlen angefertigt wurde, so schließen die Beobachter demnach, daß der letzteren Strahlung die kleinere Wellenlänge zukomme, wie man es ja auch vom Standpunkte der von ihnen angenommenen Theorie wohl erwarten könnte.

Nach unserem Dafürhalten steht nun aber mit dieser Annahme zunächst schon die Tatsache in Widerspruch, daß die Breite des letzten Endes der drei Aufnahmen der Beobachter nach ihren eigenen Messungen in allen drei Fällen die gleiche ist (vgl. Fig. 3); denn nach jener Theorie müßte man doch offenbar erwarten, daß die Verbreiterung des Spaltbildes bei der mit härteren Strahlen hergestellten Aufnahme — ebenso wie sie erst bei einer kleineren Spaltweite einsetzt — so sich auch für das Ende des Spaltes in schwächerem Maße als bei den beiden anderen Aufnahmen zeigen sollte.

Im übrigen läßt sich nun aber auch zeigen, daß die er-

wühlten Unterschiede der in Rede stehenden drei Aufnahmen einfach dadurch entstanden sind, daß der Beugungsspalt selbst sich in den drei Monaten, welche zwischen den Aufnahmen lagen, entsprechend geändert hat. Für diese Annahme spricht nämlich zunächst schon der Umstand, daß auch die beiden röntgenographischen „Spaltaufnahmen“ der Beobachter, von denen die eine vor Beginn und die andere nach Schluß ihrer drei Beugungsaufnahmen hergestellt wurden, sich hinsichtlich der Länge des Beugungsspaltes ganz beträchtlich unterscheiden, denn in der einen dieser Aufnahmen reicht nämlich das spitze Ende des Spaltbildes nur bis zur Marke 18, in der anderen dagegen bis nahe an 14 heran. Fast zur Gewißheit aber wird unsere Auffassung schließlich dadurch, daß auch die drei Beugungsbilder selbst sich um so weiter nach unten hin erstrecken, je später in ihnen die (scheinbare) Verbreiterung beginnt; denn das letzte Ende der drei Aufnahmen liegt bzw. bei den Teilstrichmarken $12\frac{1}{2}$, $13\frac{1}{4}$ und $12\frac{3}{4}$, d. h. der Spalt hatte sich eben an seinem unteren Ende bei der Aufnahme *B* erheblich weiter aufgetan als bei den beiden anderen.

Somit kommen wir also zu dem Schluß, daß auch die neueren Beugungsaufnahmen von Haga und Wind bei genauerer Kritik in keiner Hinsicht einen Grund zu der Annahme einer Beugung der Röntgenstrahlen liefern — ebensowenig wie dies die älteren Bilder der genannten Beobachter, noch die zahlreichen Aufnahmen Walters aus dem Jahre 1901, noch auch endlich unsere vielfachen Versuche aus neuester Zeit getan haben.

Denn wenn man vielleicht noch darauf hinweisen wollte, daß die neueren Aufnahmen der erstgenannten Beobachter nach ihren in Fig. 3 dargestellten Messungen die aus rein geometrischen Gründen am unteren Ende zu erwartende Breite jedenfalls ganz erheblich übertrafen, so haben wir dagegen zu bemerken, daß dies nach den obigen Darlegungen in gleichem Maße auch für die oberen Teile der betreffenden Bilder gilt, so daß es sich also hier nur um eine allgemeine Verbreiterung des ganzen Bildes handelt, eine Verbreiterung, auf die auch Haga und Wind niemals irgendwelchen Wert gelegt haben, da sie wohl wußten, daß eine geometrisch absolut vollkommene Abbildung eines solchen, außerordentlich feinen und noch dazu selbst durchaus nicht fehlerfreien Gebildes, wie es der Beugungs-

spalt darstellt, auf einer in so beträchtlichem Abstand dahinter aufgestellten photographischen Platte einfach unmöglich ist. Wir wollen daher an dieser Stelle auch nur noch auf eine einzige der vielen hierbei auftretenden Schwierigkeiten hinweisen, da uns, diese von den genannten Beobachtern nicht genug hervorgehoben zu sein scheint. Dieselbe betrifft die genaue Parallelstellung des ersten, die Strahlenquelle bildenden Spaltes mit dem zweiten, dem abzubildenden: die Wichtigkeit dieses Punktes leuchtet ein, wenn man berücksichtigt, daß eine Verdrehung der beiden Spalte um nur *einen* Winkelgrad unter den vorliegenden Verhältnissen schon eine Verbreiterung des ganzen Beugungsbildes um etwa 50μ bewirkt, während es sich hier doch um die Abbildung eines Objektes von 5μ Breite und darunter handelt.

Alle diese Schwierigkeiten, vor allem aber auch die der Erlangung eines bei den in Rede stehenden Dimensionen noch genügend genauen Spaltes, die u. E. von Haga und Wind ebenfalls nicht in genügendem Maße gewürdigt worden ist, sind nun auch der Grund gewesen, warum auch wir trotz sehr zahlreicher, in neuester Zeit angestellter Versuche doch bisher nicht erheblich über die schon von Walter im Jahre 1901 erreichte Genauigkeit, wie sie etwa durch Fig. 2 der Taf. V dargestellt wird, hinausgekommen sind; wir hoffen jedoch, demnächst in Besitz eines nach gänzlich neuen Prinzipien hergestellten, wesentlich genaueren Spaltepaars zu gelangen, und gedenken dann diese Versuche noch einmal wieder aufzunehmen.

Schließlich sei noch eine weitere bei diesen Versuchen auftretende Fehlerquelle erwähnt, die von Haga und Wind nicht berücksichtigt worden ist, und die allerdings nicht die Herstellung des Beugungsbildes, sondern vielmehr nur die Ausmessung des Beugungsspaltes selbst anbetrifft. Es läßt sich nämlich leicht zeigen, daß die von den Beobachtern zu diesem Zwecke angewandte, auf p. 718 Anmerkung beschriebene Methode, für die hier in Betracht kommenden sehr kleinen Spaltweiten nicht mehr brauchbar ist, da sich nämlich mit Hilfe derselben einsteils für Spalte unter 4μ Weite überhaupt kein adäquates Bild mehr erzielen läßt und da anderenteils auch die Breite des auf diese Weise erzeugten Bildes eines weiteren Spaltes mit der Größe der dabei auf-

gewandten Strahlungsenergie wächst. Zur Begründung dieser Behauptungen führen wir in nachstehender Tab. I unter B_o und B_u die Breiten der auf diese Weise erhaltenen Bilder des oberen bzw. unteren Teiles eines sehr vollkommenen, unter dem Mikroskope an den betreffenden Stellen bis auf etwa $0,5 \mu$ Unsicherheit bzw. 7 und 1μ breiten Spaltes von etwa 12 mm Länge an. Die photographische Schicht befand sich bei allen in der Tabelle angeführten Aufnahmen in 6 mm Abstand hinter diesem Spalte, während der in 75 cm Abstand davor aufgestellte Lichtspalt jeweils die unter s_1 angegebene Breite hatte. Endlich ist noch in der Tabelle unter $s_1 \cdot i \cdot t$ das Produkt aus der Spaltbreite s_1 in μ , der die Röntgenröhre durchsetzenden, mittleren Stromstärke i in Milliampères und der Expositionszeit t in Minuten angegeben, ein Produkt, das als Maß der bei der betreffenden Aufnahme benutzten Röntgenenergie dienen kann, da die Härte der Röhre in allen Fällen annähernd die gleiche war.

Tabelle I.

Röntgenographische Breiten, B_o und B_u , zweier bzw. 7 und 1μ breiten Teile eines Beugungsspaltes bei verschiedener Strahlungsenergie $s_1 \cdot i \cdot t$.

Abbildung	I	II	III	IV	V
s_1	7	100	100	100	400μ
$s_1 \cdot i \cdot t$	3360	6500	7800	9300	20000
B_o	10	12	12	13	14μ
B_u	4	5	6	7	8μ

Man ersieht aus dieser Tabelle zunächst, daß das untere, etwa 1μ weite Ende des Spaltes selbst bei der kleinsten aufgewandten Strahlungsenergie (Aufnahme I) im Bilde schon eine Breite von etwa 4μ hatte, so daß also von einer adäquaten Abbildung des betreffenden Spaltteiles selbst in diesem Falle keine Rede mehr sein kann. Das so erzeugte Bild wird ferner bei Anwendung größerer Energiemengen immer breiter, so daß die Breite des genannten Spaltstückes bei der Aufnahme V sogar 8μ betrug, d. h. also um etwa 6μ zu breit war; denn nach der geometrischen Berechnung — auf Grund des angegebenen Wertes von s_1 und der angeführten Ab-

stände — sollte nämlich auch in diesem Falle das Bild höchstens um $1\text{ }\mu$ breiter sein als der Spalt selbst. Statt dessen ist es aber an beiden Enden um ungefähr $6\text{ }\mu$, d. h. also um nahezu dieselbe Größe, zu breit. Diese letztere Beziehung gilt übrigens auch für die anderen Aufnahmen, wie man einfach daraus ersieht, daß die Differenz $B_o - B_u$ für alle nahezu die gleiche und zwar gleich der Differenz der in Frage kommenden Spaltbreiten selbst ist.

Indem wir uns hinsichtlich der Ursache dieser Verbreiterung eine besondere Untersuchung vorbehalten, entnehmen wir daraus in bezug auf die hier in Rede stehende Frage schließlich noch das, daß die von Haga und Wind angegebenen Weiten zumal des letzten Endes ihres Beugungsspaltes sämtlich um ein beträchtliches zu groß waren, so daß sich demnach auch die Größe der von ihnen aus ihren Beugungsversuchen berechneten Wellenlängen um ein ganz beträchtliches erniedrigt; denn diese Wellenlänge nimmt, wie die Beugungsformel zeigt, *quadratisch* mit der Spaltbreite ab.

Da jedoch die Haga und Windschen Versuche nach unseren obigen Darlegungen in keiner Weise auf eine Beugung und also auch ebensowenig auf eine Wellenlänge der Röntgenstrahlen schließen lassen, so kann also dieses letztere Resultat nach unserem Dafürhalten höchstens in dem Sinne verwertet werden, daß danach *die fragliche Wellenlänge — falls überhaupt eine solche existiert — jedenfalls noch weit unter der von Haga und Wind gefundenen Größenordnung, d. h. also weit unter $0,1\text{ }\mu\mu$ gelegen sein muß* — und das ist also schließlich auch das Resultat dieser Abhandlung.

Hamburg, Physik. Staatslaboratorium, im Januar 1908.

(Eingegangen 16. Januar 1908.)

**5. Zur Theorie der Überspannung bei elektrolytischer Gasabscheidung;
von Hans Georg Möller.**

(Vorläufige Mitteilung.)

Der erste, der das Problem der Überspannung in Angriff nahm, war Nernst. Aus den Messungen von Caspari¹⁾, die auf seine Veranlassung hin unternommen wurden, schloß er²⁾, daß für die leichte Abscheidung der Gase in Blasenform ihre Löslichkeit in der Elektrode wesentlich sei. Dieser Arbeit folgten eine Reihe experimenteller Untersuchungen und andere Erklärungsvorschläge. Während Caspari das Potential beobachtet hatte, welches zum Abscheiden des ersten Bläschens nötig war, nahmen Coehn und Dannenberg³⁾ die Stromspannungskurve auf. Ihre Überspannungswerte stimmten mit den Casparischen hinreichend überein. Haber⁴⁾ berechnet die Stromspannungskurve nach der logarithmischen Formel

$$(1) \quad E = a + b \log I,$$

worin E die Spannung, I der Strom, a und b Konstanten sind. Er deutet dieses Resultat durch Annahme einer träge verlaufenden Reaktion. Tafel⁵⁾ schlägt vor, für diese träge Reaktion die Umsetzung $2H = H_2$ anzunehmen. Diese beiden Ansichten diskutiert später Lewis.⁶⁾ Ostwald⁷⁾ weist auf den Einfluß der Glätte der Elektrodenoberfläche hin, die nicht nur bei Quecksilber, sondern bei allen flüssigen Amalgamelektroden zu hoher Überspannung Veranlassung gebe, eine Annahme, die ebenfalls mehrfach diskutiert wird.⁸⁾

1) W. Caspari, Zeitschr. f. physik. Chem. 30. p. 89. 1899.

2) W. Nernst, Theor. Chem. 5. Aufl. p. 745.

3) A. Coehn u. K. Dannenberg, Zeitschr. f. physik. Chem. 38. p. 609. 1900.

4) F. Haber, Zeitschr. f. physik. Chem. 32. p. 193. 1900.

5) J. Tafel, Zeitschr. f. physik. Chem. 34. p. 200. 1900.

6) G. N. Lewis, Zeitschr. f. physik. Chem. 56. p. 193. 1906.

7) W. Ostwald, Zeitschr. f. Elektrochemie 6. p. 39. 1899/1900.

8) Roskowki, E. Beetz, F. Streintz u. C. Fromme.

In der nachstehenden Untersuchung soll ein neuer Erklärungsversuch dargestellt werden unter Heranziehung der molekularen Anziehungskräfte, die an der Grenzfläche zwischen Elektrode und Elektrolyt tätig sind.

1. Theorie.

Auskunft über die molekularen Anziehungskräfte gibt die Kapillaritätstheorie. Die neuesten Fortschritte auf diesem Gebiet verdanken wir van der Waals und Bakker, die nicht nur die beiden Grundgesetze der Kapillartheorie, sondern auch die thermischen Eigenschaften der Kapillarkonstanten in den Bereich ihrer Untersuchungen zogen. Da ich auf ihren Anschauungen aufbauen will, muß ich einleitend über ihre Arbeiten kurz referieren¹⁾:

Nach diesen beiden Forschern ist an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Dampf keine Unstetigkeit, sondern eine wohldefinierte dünne Übergangsschicht anzunehmen. Die Dichteverteilung in dieser Schicht ist eine ganz bestimmte; die Differentialgleichung zur Berechnung der Abhängigkeit der Dichte ϱ von einer senkrecht zur Schicht verlaufenden räumlichen Koordinate h wird geliefert durch die Forderung der Stabilität in der Grenzschicht, d. h. durch das aus $\delta F = 0$ folgende Variationsproblem (F = freie Energie). Die Ableitungen von ϱ nach h gelangen folgendermaßen in den Ausdruck für F . Die freie Energie enthält als Anteil an der inneren Energie das Wechselwirkungspotential der Moleküle infolge ihrer molekularen Anziehungskräfte. Dieses wird in der üblichen Weise (vgl. Neumann, Theorie der Kapillarität, Leipzig) unter Annahme einer zunächst unbekannten, durch

$$(2) \quad \varrho = \varrho_0 + h \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)_0 + \dots$$

dargestellten Dichteverteilung berechnet, enthält also die Differentialquotienten von ϱ nach h .

1) J. van der Waals, Zeitschr. f. physik. Chem. 13. 657; G. Bakker, l. c. 14. p. 448; 20. p. 500; 28. p. 710; 33. p. 487; 34. p. 174; 36. p. 688; 37. p. 477; 42. p. 72; 48. p. 36; 51. p. 356; 56. p. 101; 59 p. 218.

Aus dem Resultat Bakkers, der Berechnung der Dichte-Verteilung in der Übergangsschicht aus der Bedingung für das Gleichgewicht, läßt sich mit Hilfe des Entropiesatzes folgern¹⁾: Eine Gasblase kann in einer Flüssigkeit erst dann entstehen, wenn das der GleichgewichtsdichteVerteilung entsprechende Dichtegefälle oder ein stärkeres bereits hergestellt ist. Und zwar ist diese Bedingung nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend. Diese Folgerung, welche bereits Bakker, wenn auch ohne Beweis, zu seiner Bemerkung über den Siedeverzug benutzt, bildet den eigentlichen Übergang zu unseren Untersuchungen.

Den Vorgang der Gasentwickelung an einer Elektrode wird man sich demnach folgendermaßen zu denken haben: Zunächst wird durch die angelegte elektrische Spannung Gas in die Übergangsschicht zwischen Elektrode und Elektrolyt so lange hineingepräßt²⁾ werden müssen, bis das nötige Dichtegefälle aufgebaut ist. Bei weiterer Elektrolyse müßte sich jetzt ein dünnes, über die ganze Elektrode ausgebreitetes Gasblättchen bilden. Dieses zieht sich, als labiles Gebilde zu kleinen „Elementarbläschen“ zusammen, die sich ihrerseits wieder zu der großen Blase vereinigen, die man auf der Kuppe der Elektrode beobachtet.

Beim Zusammenschmelzen der gasreichen Übergangsschicht an der Elektrode geht die Energie, die zu ihrem Aufbau nötig war, für die Gasentwickelung verloren. Sie setzt sich zunächst in die kinetische Energie des rasch verlaufenden Vorganges, dann in Wärme um. Diese Energie der Zwischenschicht, welche die Stromquelle über die normale Zersetzungsentnergie hinaus zu liefern hat, ist die der Überspannung entsprechende.

Es berechnet sich somit die Überspannung $\Delta \varepsilon$ aus

$$\Delta \varepsilon \cdot 96540 \text{ Volt-Coul.} = \frac{E}{m} \text{ C.G.S.} = \frac{E}{m} 10^{-7} \text{ Volt-Coul.}$$

zu

$$(3) \quad \Delta \varepsilon = \frac{E}{m} \frac{10^{-7}}{96540} \text{ Volt,}$$

1) Die mathematische Durchführung der Beweise befindet sich in meiner demnächst erscheinenden Dissertation.

2) Damit nähern wir uns ganz den Anschauungen von Nernst. W. Nernst, Theoretische Chemie p. 745. 5. Aufl.)

wobei E die Energie in 1 qcm der Schicht in C.G.S. ausgedrückt, m die Gasmasse in 1 qcm der Schicht in Grammäquivalent ausgedrückt, bedeutet.

Der Einfluß der Zusammensetzung des Elektrolyten, der Temperatur und des Druckes äußert sich durch die Veränderungen, die diese Faktoren in der Dichtevertteilung der Zwischenschicht Gas/Elektrolyt hervorrufen. Der Einfluß des verschiedenen Elektrodenmaterials zeigt sich in der verschieden starken Unterstützung, welche beim Aufbau der Zwischenschicht die elektrische Kraft von den molekularen Anziehungskräften erfährt. Elektroden, die das abzuscheidende Gas stark anziehen (*in extremo lösen*, Nernst, l. c.), werden daher die Überspannung herabdrücken.

Um die Energie E und die Masse m (Formel (3)) zahlenmäßig zu berechnen, wird man die van der Waalssche Methode für ein heterogenes System von drei Komponenten: Elektrode, Gas, Elektrolyt zu verallgemeinern haben. Den drei unabhängigen Dichtevariationen entsprechend, wird das Variationsproblem $\delta F = 0$ drei simultane Differentialgleichungen zur Bestimmung der Dichtevertteilungen liefern. Diese Gleichungen werden aber zur wirklichen Durchführung der Rechnung zu kompliziert; sie enthalten außer den zwölf Konstanten der Zustandsgleichung¹⁾ noch *drei Reihen* von Konstanten, die zur Darstellung der vorläufig unbekannten Kräftefunktionen eingeführt werden müßten. Zur Vereinfachung des Problems wird in erster Linie die Beseitigung dieser drei Reihen von Konstanten, also die Kenntnis der Kräftefunktion nötig sein.

Eine mathematische Überlegung²⁾ führt uns auf ein Wechselwirkungspotential Φ von der Form

$$(4) \quad \Phi = f \sum h k \iint \frac{q_h q_k}{r} \cdot e^{-\frac{r}{\lambda_{hk}}} dk dk'$$

1) J. van der Waals, Die Kontinuität usw. 2. Kap. 2. § 2.

2) Für $\Phi = f \sum h k \iint q_h \psi_h dk dk'$, worin ψ_h das Potential der von der Molekülgattung h ausgehenden Anziehungskräfte für einen Pol im Volumenelement dk bedeutet, gelten folgende Bedingungen:

I. Die Energie ist überall endlich: $d\psi_{(r=0)} = 4\pi\varrho$.

II. Das Wechselwirkungspotential ist innerhalb der homogenen Phase überall räumlich konstant: $\Phi = C$, höchstens ein New-

worin $\varrho_h \varrho_k$ die Dichten der einzelnen Komponenten h, k in den Raumelementen dk, dk' , r der Abstand der beiden Raumelemente, f eine Maßkonstante, λ_{hk} eine der Natur der Kräfte zwischen den Molekülen h und k entsprechende Konstante ist. Φ unterscheidet sich von dem Wechselwirkungspotential infolge Newtonscher Anziehungskräfte nur durch den Faktor $e^{-r/\lambda_{hk}}$. Dieser mit wachsendem r rasch abnehmende „Auslöschungsfaktor“ bringt zur Darstellung, daß die molekularen Anziehungskräfte viel rascher wie die Gravitationskräfte abnehmen. Sie betragen in einer Entfernung λ_{hk} nur noch den e^{10} Teil der Gravitation. Diese Überlegung zeigt den Zusammenhang von λ_{hk} mit dem Radius der Wirkungssphäre.

Für sein einkomponentiges System Dampf/Wasser hat van der Waals das Wechselwirkungspotential φ abgeleitet:

$$(5) \quad \varphi = \iint \varrho^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} dh dk.$$

Formel (4) zeigt, daß das Wechselwirkungspotential Φ des allgemeinen Falles aus Funktionen φ linear zusammensetzt. Bei einer einfachen Superposition bleibt aber der Typus

tonisches Kraftfeld kann sich überlagern: $\Delta \Phi = 0$ (in erster Annäherung).

Hieraus folgt:

$$\Phi = f \iint \sum \varrho_h \varrho_k \frac{1}{r} f(r) dh dk'.$$

Der Auslöschungsfaktor $f(r)$ muß folgende Eigenschaften haben:

1. $f(r) (r=0)$ ist endlich und von Null verschieden (Bedingung I).
2. $f(r)$ konvergiert mit wachsendem r stärker wie jede negative Potenz [Bedingung für die Konvergenz der van der Waalschen Reihe für s (Zeitschr. f. physik. Chem. 13. p. 668)].
3. $f(r)$ ist überall stetig und endlich (eine Umformung nach dem Greenschen Satz muß möglich sein).
4. $f(r)$ enthält einen Parameter a derart, daß $\lim(a=\infty) \Delta \Phi = 0$ (Bedingung II).

Diesen Bedingungen genügen nur Funktionen von der Form

$$f(r) = a^{-\chi(r)}, \quad \chi(r) \leq r, \quad \chi(r)_{(r=0)} = r.$$

Die Annahme der Funktion a^{-r} nach dem Vorbilde von van der Waals (Zeitschr. f. physik. Chem. 13. p. 706) wird also auch im allgemeinen Fall eine gute Annäherung liefern. – Die Durchführung dieser hier nur skizzierten Überlegung findet sich in meiner Dissertation.

aller Gleichungen und somit auch der Resultate erhalten. Wir dürfen infolgedessen die einfachen Bakkerschen Formeln ohne weitere Rechnung auf den allgemeinen Fall übertragen und werden dabei qualitativ richtige Resultate erhalten.

Derartige qualitative Schlüsse sollen im nächsten Paragraphen gezogen und so die Theorie einer experimentellen Prüfung zugänglich gemacht werden.

2. Folgerungen aus der Theorie.

Die Aufdeckung des Zusammenhanges der Überspannung mit den molekularen Anziehungskräften gestattet unmittelbar noch keine experimentelle Prüfung, da die Werte der Anziehungskräfte nicht direkt gemessen werden können. Wir müssen daher eine zweite Gruppe von Erscheinungen aufsuchen, die ebenfalls vom Spiel dieser Anziehungskräfte abhängen, aber der Messung bei möglichst vielseitigen Versuchsbedingungen zugänglich sind. Schließt man von diesen rückwärts auf die Anziehungskräfte und weiter auf die Überspannung, so gelangt man zu den gewünschten Beziehungen zwischen zwei meßbaren Größen.

Diese zweite Gruppe meßbarer Größen sind die Kapillarkonstanten; sie bildeten ja den Ausgangspunkt zu dem Studium der molekularen Anziehungskräfte.

Die van der Waalssche Formel für die Kapillarspannung H einer Flüssigkeit gegen ihren Dampf

$$(6) \quad H = c \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d\varrho}{dh} \right)^n dh,$$

worin c eine Konstante, ϱ und h dasselbe wie in Formel (2) bedeutet, zeigt, daß die Kapillarspannung an der Grenzfläche Gas/Elektrolyt mit dem Dichtegefälle wächst; da mit diesem auch die Überspannung wächst, so müssen *Kapillarspannung* und *Überspannung parallel gehen*.

Auch auf die Anziehungskräfte, die von der Elektrode ausgehen, gestatten die Kapillarkonstanten einen Schluß zu ziehen. Sind diese Kräfte groß, so wird sich die Flüssigkeit auf der Elektrode auszubreiten streben und der Randwinkel ϑ (Fig. 1) klein sein. Die Anziehungskräfte zwischen Elektrode

und Gas, die im entgegengesetzten Sinne wirken, sind wegen der geringen Dichte des Gases klein und durften daher hier vernachlässigt werden. Starke Anziehungskräfte der Elektrode unterstützen zu gleicher Zeit wirksam die elektrische Kraft beim Aufbau der Übergangsschicht und drücken die Überspannung herab. *Randwinkel der Gasblase und Überspannung müssen demnach gemeinsam sinken, d. h. ebenfalls parallel gehen.*

Ferner gibt die Theorie Aufschluß über einen möglichen Einfluß der Oberflächenrauhigkeit. Eine rauhe Oberfläche, in deren Rissen und Poren sich etwas Gas ansammeln kann, wird die Gasmasse in der Zwischenschicht (m in Formel (3) für $\Delta\epsilon$) vergrößern und die Überspannung herabdrücken. Da aber die Übergangsschichten, wie van der Waals gezeigt hat¹⁾, sehr dünn sind, so werden ziemlich gut polierte Elektroden sich immer noch wie rauhe Oberflächen verhalten. Nur bei Hochglanzpolituren oder flüssigen Amalgamelektroden wird ein Einfluß zu erwarten sein.

Schließlich sind alle Veränderungen der Oberfläche, die den Randwinkel beeinflussen, zu beachten. Von ihnen wird die Größe der Überspannung auch abhängen. So muß z. B. eine Verunreinigung der Elektrode mit minimalen Spuren von Fett, das bekanntlich die Benetzung durch wässrige Lösungen verhindert, die Überspannung stark erhöhen.

Eine weitere Folgerung aus unseren Anschauungen ist die Ausdehnung der Lippmannschen Messungen auf andere Metalle als Quecksilber. Das Dichtegefälle wird auch an Elektroden aus festem Metall durch elektrische Polarisation sicher geändert und mit ihm nach obiger Theorie die Kapillarspannung. Zugleich haben wir im Randwinkel ein Reagens auf Veränderungen der Oberflächenspannung, die sich ja bei festen Metallen nicht mehr durch Steigen und Fallen eines Meniskus kennzeichnen. Damit eröffnet sich ein weiteres Feld interessanter Anwendungen.

3. Experimenteller Teil.

Von den im vorigen Paragraphen mit Hilfe der Theorie vorausgesagten Erscheinungen beabsichtigte ich zunächst das

1) J. van der Waals, Zeitschr. f. physik. Chem. 18. p. 681.

Parallelgehen von Randwinkel und Überspannung zu prüfen. Zu diesem Zwecke sollte an Elektroden von verschiedenem Metall Wasserstoff aus $\frac{1}{10}$ normaler Schwefelsäure entwickelt werden. Die Zersetzungsspannung wurde in der üblichen Weise durch Aufnahme des Knickes in der Stromspannungskurve gemessen und durch Ermittelung des Potentials, bei dem sich das erste Bläschen bildete, kontrolliert. Die Potentialmessung wurde gegen eine ruhende Wasserstoffelektrode mit Hilfe der Kompensationsmethode, später direkt mit einem Dolezalekschen Binantenelektrometer ausgeführt. Um den durch gelösten Sauerstoff bedingten Reststrom herabzudrücken, diente

als Arbeitselektrode eine zweite Wasserstoffelektrode. Zum Messen des Randwinkels diente folgende Einrichtung: Die auf der Elektrode aufsitzende Wasserstoffblase wurde durch ein Mikroskop anvisiert. Dieses besitzt einen Faden. Es ist um seine Achse drehbar; ein Teilkreis gestattet diese Drehung abzulesen. Der Faden wird dann einmal parallel dem Elektrodenrand

(Stellung 1, Fig. 1), das andere Mal tangential dem Blasenrand (Stellung 2) eingestellt. Die Differenz der Ablesungen am Teilkreis gibt den Randwinkel ϑ .

Zunächst gelang es allerdings nur auf Quecksilber eine einzelne, sauber aufsitzende Blase zu erzeugen. Auf anderen Metallen entstand ein ganzes Schwammgewächs von Blasen (Fig. 5a), die gegenseitig ihren Randwinkel verdeckten. Ich beschränkte mich daher zunächst auf Messungen am Quecksilber. Um verschieden hohe Überspannungswerte zu erhalten, wurde die Temperatur variiert.

Zur Ausführung der Messungen war die Konstruktion eines besonderen Thermostaten nötig, der die Temperatur einstellung genau und namentlich rasch zu wechseln erlaubte, da die Messungen wegen der Empfindlichkeit gegen die geringsten Verunreinigungen vor Fertigstellung einer ganzen Kurve nicht unterbrochen werden durften.

Die Beobachtungen ergaben folgende Kurven (Fig. 2,

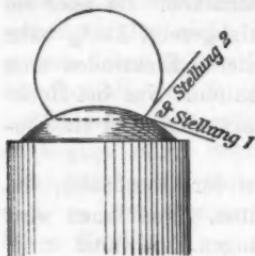


Fig. 1.

Kurve 1): Die Überspannung Δe steigt zunächst mit abnehmender Temperatur, von 0,78 Volt bei Zimmertemperatur, von 9° an etwas steiler, erreicht bei 5,8° ein Maximum von 0,98 Volt und fällt dann wieder auf 0,86 Volt bei 2,0°.

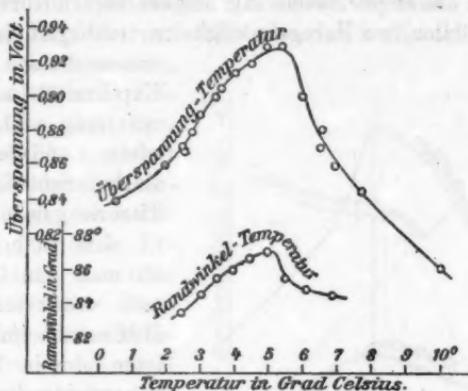


Fig. 2. Überspannungstemperatur- und Randwinkeltemperaturkurve für Quecksilberelektroden und Wasserstoff aus $1/10$ n. Schwefelsäure entwickelt.

Unsere Theorie verlangt dasselbe Maximum in der Randwinkeltemperaturkurve (ϑ, t -Kurve) und sagt damit ein ganz neues und unerwartetes Verhalten des Randwinkels voraus. Ich habe wenigstens in der Literatur, selbst in den umfassenden Arbeiten von Grunmach und Domke¹⁾ nichts darüber finden können. Der Verlauf der Kapillaritätskonstante des reinen Wassers mit der Temperatur zeigt ebenfalls keine Andeutung von einem solchen Maximum. Die Messungen des Randwinkels bei verschiedener Temperatur (Fig. 3, Kurve 2) ergaben in der Tat genau den theoretisch erschlossenen Verlauf der ϑ, t -Kurve. Der Randwinkel steigt zunächst mit abnehmender Temperatur von 9° an ebenfalls etwas steiler, erreicht genau wie die Überspannung bei 5,8° sein Maximum mit 87°, und fällt dann wieder bis auf 83° bei 2,1° C.

Die Kurve wurde zur Kontrolle jedesmal bei abnehmender Temperatur und sofort noch ein zweites Mal bei steigen-

1) L. Grunmach u. Domke, Wissenschaftliche Abhandlungen der Normaleichungskommission. Heft 3. 1907.

der Temperatur aufgenommen. Die zahlreich vorgenommenen Wiederholungen des Versuches ergaben Kurven von demselben Typus, immer mit einem Maximum von $5,3^{\circ}$ und leidlich guter Übereinstimmung.

Durch das enge Zusammengehen der beiden Kurven (Fig. 3), sogar an Stellen, wo Unregelmäßigkeiten vorliegen, ist der Zusammenhang zwischen Kapillarität und Überspannung schlagend bewiesen und eine erste starke Stütze für die Theorie gewonnen.

Um zu entscheiden, ob man den Grund für das Auftreten dieses Maximums im Elektrolyten oder in der Quecksilberelektrode zu suchen hat, wurden Überspannungstemperaturkurven an noch anderen Metallen aufgenommen. Zeigen sie ebenfalls das Maximum bei gleicher Temperatur, so ist sehr wahrscheinlich die Ursache in dem kapillaren Verhalten des Elektro-

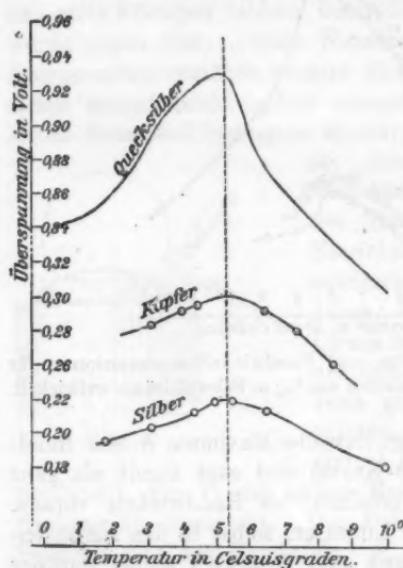


Fig. 3. Überspannungstemperaturkurven für Quecksilber, Kupfer, Silber.

lyten zu finden. Die Messungen an Kupfer und Silber veranschaulicht Fig. 3. Das Maximum der Überspannung bei $5,3^{\circ}$ konnte wieder mit Sicherheit nachgewiesen werden, obwohl die ganze Höhenlage der Kurve bei Wiederholung mit einer anderen Kupfer- oder Silberelektrode noch schwankte.

Da es hiernach richtig zu sein scheint, im Elektrolyten die Ursache für das Maximum zu suchen, so muß auch die Kurve, welche die Kapillarspannung des Elektrolyten gegen Luft darstellt, dieses Maximum erkennen lassen. Ihren Verlauf können wir sogar noch genauer voraussagen, wenn wir auf die Verschiedenheit der Kurven für Kupfer und Queck-

silber folgende Überlegung gründen: In dem verschiedenen starken Abfall der gesamten Kurve nach rechts zeigt sich offenbar der verschiedene Einfluß der Elektrode auf die Überspannung. Wie wir wissen, steigt mit sinkenden Kapillarkräften die Überspannung. Die Verschiedenheit der Quecksilber- und Kupferkurve müßte also durch die sehr plausible Annahme erklärt werden, daß die molekularen Anziehungskräfte des flüssigen Quecksilbers stärker mit der Temperatur abnehmen wie die des festen Kupfers. Ist diese Erklärung richtig, so müßte die Kurve für eine Elektrode mit konstanten Molekularkräften noch viel steiler im ganzen nach rechts sinken; diese durch Änderungen von seiten der Elektrode nicht beeinflußte Kurve würde dann den Einfluß des Elektrolyten genau angeben. Die ihr parallel verlaufende Kapillarspannungskurve des Elektrolyten an sich muß ebenfalls steil nach rechts sinken. Die nach der

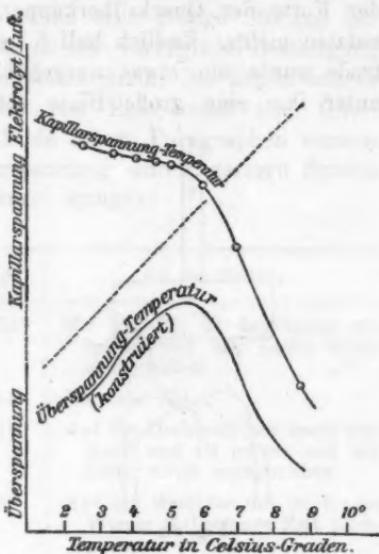


Fig. 4. Kapillarspannung-Elektrolyt-Luft-Temperaturkurve und die daraus konstruierte Überspannung-Temperaturkurve.

Steighöhenmethode ausgeführten Messungen (Fig. 4) bestätigen unsere Schlüsse vollkommen. — Durch Aufbau der Steighöhenkurve auf eine geeignet ansteigende Kurve, deren Neigung durch die Änderungsgeschwindigkeit der molekularen Anziehungskräfte zwischen Metall und Lösung mit der Temperatur gegeben ist, kann man also für beliebige Metalle die Abhängigkeit der Überspannung von der Temperatur finden. Für Quecksilber ist die Konstruktion in Fig. 4 durchgeführt. Die Abhängigkeit der Anziehungskräfte der Elektrode für die Lösung von der Temperatur ist als linear in erster Annäherung angenommen.

Der Parallelismus der konstruierten und der aufgenommenen Kurve ist evident.

Nun wurden die Randwinkelmessungen an anderen Metallen als Quecksilber wieder in Angriff genommen und damit die Aufgabe, die kleinen störenden Nebenblasen zu beseitigen. Veränderungen der Elektrodengröße und Gestalt, Nachbildung der Form der Quecksilberkuppe, verschiedenartige Polituren nutzten nichts. Endlich half folgendes Mittel: Über der Elektrode wurde ein etwas ausgehöhltes Dach angebracht, und unter ihm eine große Blase entwickelt, die sich zwischen

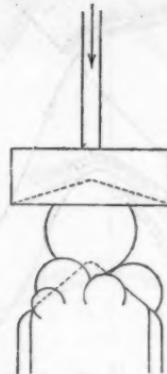


Fig. 5 a.

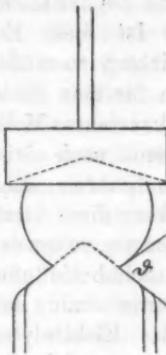


Fig. 5 b.

Elektrode und Dach festsetzte (Fig. 5a). Beim Niedersenken des Daches drückt sich die große Blase auf der Elektrode breit und verschluckt dabei sämtliche störenden Nebenblasen. zieht man das Dach wieder hoch, hat man nur noch die große Blase mit deutlich sichtbarem Randwinkel (Fig. 5 b).

Damit waren aber die Schwierigkeiten noch nicht gehoben. Die mit basischem Wiener Kalk und Öl auf der Drehbank polierten und mit einem reinen Leder sorgfältig nachgeriebenen Elektroden zeigten ganz inkonstante Werte. Am ehesten gelang es, reproduzierbare Werte am leicht zu polierenden Nickel zu erhalten. Die Elektroden wurden lange Zeit mit trockenem basischen Wiener Kalk auf fettfreiem Leder unter ganz geringem Druck durch ein kleines Maschinchen poliert, das ich mir zu diesem Zweck konstruierte. Die Ab-

weichungen der Messungen bestanden in einer gleichzeitigen Erhöhung von Überspannung und Randwinkel gegen den durch langes Nachpolieren reproduzierbar erhaltenen Minimalwert. Wie die in der Tabelle angeführten Werte zeigen, ist der Grund der Fehler Verunreinigung durch Leinöl bzw. Paraffin.

Diese Abweichungen, obschon eine lästige Störung der Messungen, bilden somit wiederum eine vorzügliche Bestätigung der Theorie, und zwar im doppelten Sinne: Sie zeigen erstens das unbedingte Parallelgehen von Randwinkel und Überspannung, zweitens die am Ende des 2. Paragraphen vorausgesagte Erhöhung der Überspannung durch geringe Spuren benetzungshindernder Verunreinigungen.

Elektrode	Δs	ϑ	Art der Politur
Ni/H ₂ SO ₄ 1/10 n.	0,59 Volt	70°	Mit Paraffin in Berührung gebracht und mit Leder allein nachgerieben.
Ni/H ₂ SO ₄ 1/10 n.	0,82 „	51	Normaler Wert.
Cu/H ₂ SO ₄ 1/10 n.	0,62 „	71	Auf der Drehbank mit basischem Kalk und Öl poliert und mit Leder allein nachgerieben.
Cu/H ₂ SO ₄ 1/10 n.	0,23 „	37	Auf der Maschine mit trockenem Wiener Kalk lange Zeit nachpoliert.
Ag/H ₂ SO ₄ 1/10 n.	0,415 „	58	Vorläufige Werte, mit Eisenoxyd (aus Eisenoxalat durch Glühen hergestellt) und Alkohol auf der Maschine poliert.
Ag/H ₂ SO ₄ 1/10 n.	0,240 „	45	

Wir wiesen im theoretischen Teile nach, daß der Einfluß der Elektrode auf die Überspannung durch den Randwinkel, der Einfluß der Kombination von Elektrolyten und Gas durch die Größe der Kapillarkonstante an der Grenze Gas-Elektrolyt gekennzeichnet wird.

Wenn wir alle Messungen von Randwinkel und Überspannung, die nur die Kombination H₂/H₂SO₄ 1/10 n. gemeinsam haben, in ein Koordinatennetz eintragen, so müssen sie sich zu einer glatten Kurve zusammenfügen. Fig. 6 bestätigt das. Diese Kurve enthält als Parameter nur noch die charak-

teristischen Eigenschaften der Kombination Gas-Elektrolyt. Diese sind mit dem Wechselwirkungspotential Φ gegeben. Denn kennt man dieses, so läßt sich prinzipiell alles andere aus $\delta F = 0$ berechnen. Für das an der Grenzfläche Elektrolyt-Gas gültige Wechselwirkungspotential wurde oben ein Ausdruck von der Form

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = & \int \int \left(\varrho_H^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_{H_2}}}}{r} + \varrho_H \varrho_{H_2O} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_{H_2, H_2O}}}}{r} \right. \\ & \left. + \varrho_{H_2O}^2 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda_{H_2O}}}}{r} \right) dk dk' \end{aligned} \right.$$

abgeleitet. Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie in Formel (4), nur wurde für kk' H_2 und H_2O dem vorliegenden Fall entsprechend eingesetzt. Dieses Φ enthält drei Konstanten λ_{H_2} , λ_{H_2, H_2O} und λ_{H_2O} . Die mathematische Formel für die Überspannungsrandwinkelkurve muß also ebenfalls drei Konstanten enthalten. Von diesen wird eine durch die theoretisch erschlossene Bedingung eliminiert, daß die Kurve durch den Nullpunkt geht, die beiden anderen sind empirisch aus den Messungen zu berechnen.

Diesen Anforderungen genügt die Formel

$$(8) \quad \Delta \varepsilon = \frac{e^{a \theta} - 1}{b}.$$

Sie enthält die notwendigen drei Konstanten, von ihnen ist eine, nämlich die Eins, universell, und entspricht der Bedingung, daß die Kurve durch den Nullpunkt geht. Die anderen beiden, a und b , berechnen sich für die Kombination: Wasserstoff, Schwefelsäure $1/10$ normal zu

$$a = 0,0264,$$

$$b = 9.$$

Es gilt also für die Kombination H_2/H_2SO_4 $1/10$ n.

$$\Delta \varepsilon = \frac{e^{0,0264 \theta} - 1}{9} \text{ Volt},$$

wenn man ϑ in Grad ausdrückt, oder zur Berechnung mit Briggesschen Logarithmen handlicher:

$$\log(\Delta s + 0,111) = 0,0115 \vartheta - 0,954.$$

Die Kurve in Fig. 6 ist mit dieser Formel berechnet.

Der Gültigkeitsbereich der Formel ist ein sehr großer. Er erstreckt sich auf alle Elektroden, gleichgültig, aus welchem Metall sie bestehen, ob sie rauh sind, oder bis zu beliebigem Grade poliert, ob sie metallisch sauber sind, oder irgendwelche Verunreinigungen tragen. Er umfaßt ferner alle Temperaturen.

Die Übereinstimmung der Messungen mit der Formel ist eine so ausgezeichnete (die Abweichungen betragen nur etwa

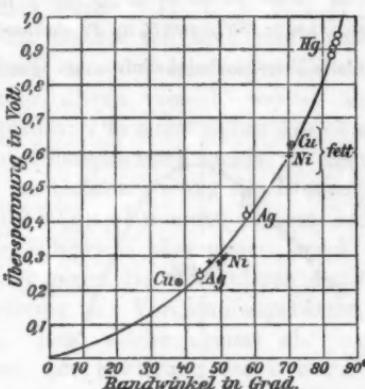


Fig. 6. Randwinkel-Überspannungskurve.

0,01 Volt), daß man eine handliche Methode zur Messung der Überspannung auf diesen Zusammenhang gründen kann. Der Randwinkel läßt sich mit jedem wagerecht gestellten Mikroskop rasch messen. Den zugehörigen Überspannungswert gibt die Formel oder die Kurve (Fig. 6) ebenso auf $1/100$ Volt genau an, wie die zeitraubende Aufnahme der Stromspannungskurve.

Als weiteres Anwendungsgebiet unserer Theorie wurde die Verallgemeinerung der Lippmannschen Beobachtungen

auf andere Metalle genannt. Das Studium der Lippmannschen Kurven für andere Metalle ist namentlich deswegen interessant, da jetzt die Möglichkeit vorliegt, weiteres Beob-

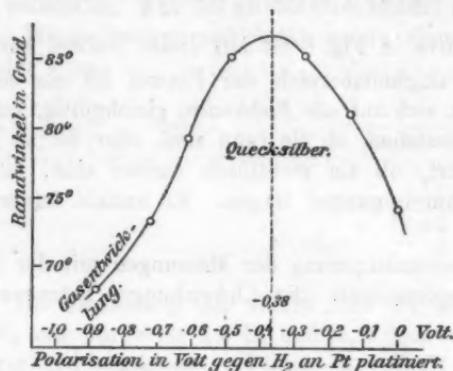


Fig. 7. Polarisation-Randwinkelkurve am Quecksilber.

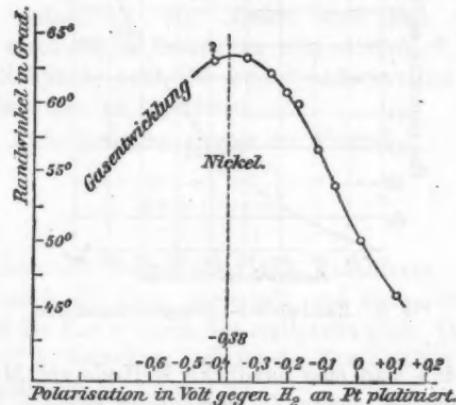


Fig. 8. Polarisation-Randwinkelkurve am Nickel.

achtungsmaterial zum Studium der noch fraglichen¹⁾ Theorie des absoluten Potentials zu gewinnen, die sich ja bis jetzt

1) W. Nernst, Referat über Berührungselektrizität, Beilage zu Wied. Ann. 1896. Nr. 8; F. Krüger, Göttinger Nachr. 1904. Heft 1. p. 33.

nur auf Messungen am Quecksilber gründete. Obwohl ich die Untersuchungen auf diesem Gebiet erst begonnen habe, will ich die beiden bis jetzt erhaltenen Kurven hier schon mitteilen.

Zur Kontrolle der Methode wurde zunächst die Randwinkel polarisationskurve am Quecksilber aufgenommen. Das Resultat (Fig. 7) erweist den Randwinkel als brauchbares Reagens auf die Oberflächenspannung. Die Aufnahme der Kurve am Nickel zeigt Fig. 8. Wegen der über 0,32 Volt auftretenden Wasserstoffentwickelung war es leider nicht möglich, über das Lippmannsche Maximum hinauszukommen. Immerhin läßt die Gestalt der Kurve erkennen, daß es voraussichtlich an derselben Stelle liegt, wie beim Quecksilber, ein Resultat, welches für die Richtigkeit der Lippmannschen Theorie sprechen würde.

Zum Schluß möchte ich noch eine Bemerkung von Ostwald¹⁾ erwähnen, aus der man einen Einwand gegen unsere Theorie zu konstruieren versucht werden könnte. Ostwald sagt etwa folgendes: Die molekularen Anziehungskräfte können direkt mit der Überspannung nichts zu tun haben, denn sie sind nur von der Größenordnung des Binnendruckes, ungefähr 10000 Atm., 0,54 Volt; ein nicht abnorm hoher Wert für eine Überspannung, entspricht aber einem Druck von 10^{10} Atm.

Eine Arbeit gegen die molekularen Anziehungskräfte, von der Größenordnung der Verdampfungswärme, wäre allerdings viel zu klein. Eine solche kommt aber als reversibel umgesetzte Arbeit, zur Erklärung der irreversiblen Erscheinung der Überspannung, gar nicht in Frage. Wir betrachten hierzu vielmehr die weit größere Arbeit, die nötig ist, um die Zwischenschicht immer neu aufzubauen. Folgende Überschlagsrechnung soll zeigen, daß die Energie der Zwischenschicht bei weitem hinreichend, die Überspannung zu erklären.

Ich lege dabei die Zahlen für Wasser zugrunde, wie sie van der Waals in seiner Kontinuität, Bd. 1. p. 114, mitteilt. Ihre angeneherte Gültigkeit für verdünnte Lösungen darf man wohl annehmen. Die mittlere Wasserstoffdichte in der Zwischenschicht, die sicher kleiner wie die Gasdichte ist, nehme ich

1) W. Ostwald, Zeitschr. f. Elektrochemie 6. p. 39. 1899/1900.

gleich der Gasdichte an, um eher einen Fehler zugunsten des Einwandes zu begehen.

Die Dichte δ des Wasserstoffs in der Schicht beträgt:

$$\delta = 1 \text{ g-mol}/22 \text{ Liter} = \frac{1}{22} 10^{-4} \text{ g-mol cm}^{-3},$$

die Schichtdicke d ist

$$d = 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm.}$$

Mit einem Grammol kann man demnach eine Schicht von q qcm Größe aufbauen

$$q = \frac{1}{\frac{1}{22} 10^{-4} \cdot 1,5 \cdot 10^{-8}} = \frac{2}{1,5} 10^{12} \text{ cm}^2.$$

Der Energietüberschuß H in 1 qcm der Schicht ist

$$H = 155 \text{ C.G.S.}$$

Demnach beträgt die Energie der ganzen Schicht

$$E_s = 2 \cdot 10^{14} \text{ C.G.S.}$$

Einer Überspannung von 1 Volt würde für 1 g-mol H₂ die Energie

$$E_E = 1 \text{ Volt } 2 \cdot 96540 \text{ Amp. sec} = 10^8 \cdot 2 \cdot 96540 \cdot 10^{-1} \\ = \text{ca. } 2 \cdot 10^{12} \text{ C.G.S.}$$

entsprechen.

Die Energie der Zwischenschicht reicht also bei weitem zur Erklärung von 1 Volt Überspannung aus.

In dieser Arbeit werden nur die von van der Waals und Bakker in 13 Abhandlungen wohlgegründeten Anschauungen über die kapillare Zwischenschicht benutzt. Eine Hypothese ad hoc ist nicht darin enthalten.

Zusammenfassung.

Der Grundriß einer Theorie der Überspannung als Folgeerscheinung von molekularen Anziehungskräften wird auf den Bakkerschen Anschauungen über die kapillare Zwischenschicht aufgebaut. Aus dieser qualitativen Überlegung werden Zusammenhänge zwischen der Überspannung und den Kapillaritätskonstanten (dem Randwinkel der Blase und der Oberflächenspannung des Elektrolyten gegen Luft), der Oberflächenbeschaffenheit der Elektrode und zwischen Polarisation und der Oberflächenspannung der Elektrode gegen den Elektrolyt abgeleitet. Als brauchbares Reagens auf die Oberflächen-

spannung fester Metalle wird der Randwinkel der Blase aufgefunden.

Die Resultate der *Messungen* sind folgende:

I. Den Einfluß des Elektrolyten auf die Überspannung kennzeichnet die Kapillarspannungs- und Überspannungskurve des Elektrolyten gegen Luft. Sie geht mit der Überspannung parallel. Das wird bewiesen

1. Durch die Messungen am Quecksilber (Fig. 4) bei verschiedener Temperatur. Kapillarspannung und Überspannungskurve sind durch eine einfache geometrische Konstruktion ineinander überführbar.

2. Durch Messungen am Kupfer und Silber (Fig. 3) bei verschiedener Temperatur.

II. Den Einfluß der Elektrode auf die Überspannung kennzeichnet der Randwinkel. Er geht immer mit der Überspannung parallel. Dieses Gesetz ist von *völliger Allgemeinheit*. Es wurde experimentell bestätigt:

1. Für verschiedene Metalle (Fig. 6).
2. Für verschiedene Polituren (Tabelle).
3. Für Oberflächen, auf die Verunreinigungen gebracht wurden (Tabelle).
4. Für verschiedene Temperaturen (Fig. 2).

Der Randwinkel ϑ und die Überspannung $\Delta \epsilon$ folgen dem Gesetz

$$\Delta \epsilon = \frac{e^{\alpha \vartheta} - 1}{b}.$$

Die Konstanten a und b drücken die charakteristischen Eigenschaften von Gas und Elektrolyt aus. Für die Kombination $H_2/H_2SO_4 \frac{1}{10} n$. berechnen sie sich zu $a=0,0264$, $b=9$, wobei ϑ in Grad, $\Delta \epsilon$ in Volt ausgedrückt ist. Zur Berechnung mit Briggesschen Logarithmen ist die Formel handlicher in der Gestalt

$$\log(\Delta \epsilon + 0,111) = 0,0115 \vartheta - 0,954 \text{ Volt.}$$

Infolge der ausgezeichneten Übereinstimmung der Messungen mit der Formel wird auf dieses Gesetz eine bequeme Methode zur Messung der Überspannung gegründet.

III. Das theoretisch erschlossene Parallelgehen von Randwinkel und Polarisation wird durch Messungen am Quecksilber

geprüft. Der Randwinkel wird dabei als taugliches Reagens auf Veränderungen der Oberflächenspannung erwiesen (Fig. 7).

Die Methode wird zur Aufnahme der Lippmannschen Kurve an einem festen Metall, nämlich Nickel, verwendet. Die Kurve (Fig. 8) lässt ein Maximum bei 0,38 Volt vermuten. Das Resultat steht im Einklang mit der Theorie der absoluten Potentiale.

Ausgeführt wurden die Messungen im physikalischen Institut der technischen Hochschule Charlottenburg auf Veranlassung und unter Leitung von Hrn. Prof. Dolezalek. Ihm bin ich für seinen wertvollen Rat zu wärmstem Danke verpflichtet.

(Eingegangen 28. Januar 1908.)

6. Gleitbüschel auf Flüssigkeitsoberflächen; von Max Toepler.

Je größer bei Gleitbüschelbildung auf Flüssigkeitsoberflächen die Ergiebigkeit der Stromquelle (angewendete Kapazität) ist, und je kleiner die Leitfähigkeit der Flüssigkeit, um so längere Zeit wird dem Büschel zur Ausbildung bleiben, bis man im Grenzfalle von einem *Dauergleitbüschel* sprechen kann. Ganz analog geht ja auch pulsierendes Glimmen, die pulsierende Büschelentladung oder auch Funkenstrom in freier Luft bei hinreichender Stromintensität und genügendem Zuleitungswiderstande zu den Elektroden schließlich in Dauererscheinungen — Dauerglimmen, Dauerbüschel, Büschellichtbogen, Lichtbogen — über. An diesen *Dauerentladungen* lassen sich Untersuchungen und Messungen verschiedenster Art naturgemäß viel leichter ausführen als an stoßweise pulsierenden, sehr kurz dauernden Entladungsprozessen.

Leider stößt die Herstellung von Dauergleitbüscheln auf experimentelle Schwierigkeiten, z. B. die Notwendigkeit der Anwendung ungewöhnlich großer, hohe Spannungen vertragender Kapazitäten. Die mir verfügbare Kapazität, 74 große Leidener Flaschen von der Gesamtkapazität 310 000 cm (0,34 Mikrof.), welche sich bis 25 000 Volt beanspruchen ließen, genügen doch nur zu einer Annäherung der Entladungsvorgänge an den gewünschten Dauerzustand. Immerhin lassen sich eine Reihe Gesetze für diesen aus den ausgeführten Messungen entnehmen.¹⁾

1) Beständig andauernde Büschel sind nur auf festen Halbleitern zu erhalten; auf Flüssigkeiten wird die störungsfreie Dauer durch die ausgelösten Flüssigkeitströmungen nur auf Bruchteile einer Sekunde beschränkt; für die schlechtestleitende Flüssigkeit kamen meine Beobachtungen bei größter Kapazität dieser Grenze schon recht nahe.

I. Messungen.

A. Versuchsanordnung. Wie bei früheren Messungen von Gleitbüschelbildung auf Flüssigkeiten¹⁾ war zwischen zwei Glasplatten von 0,7 cm Stärke, 120 cm Länge und 7 cm Breite ein Gummischlauch *rr* derart gepreßt, daß ein 1 cm breiter Trog entstand (vgl. Fig. 1).



Fig. 1.

In diesen wurde zunächst Quecksilber und dann darauf die Flüssigkeit (stets destilliertes Wasser mit wechselnden Zusätzen von Kochsalz)

gegossen. Der eine Gleitbüschelpol *p*₁ berührte die Flüssigkeitsoberfläche, der andere *p*₂ führte durch sie hindurch ins Quecksilber; beide Pole (Platinstifte) standen vom zugehörigen Trogtende je 2 cm ab, ihr gegenseitiger Abstand *p*₁*p*₂ betrug 110 cm. Als Trogtiefe wurde 4,0 cm gewählt, kleinere Flüssigkeitstiefen wurden zu leicht durchschlagen unter Zertrümmerung der Glasplattenwände.

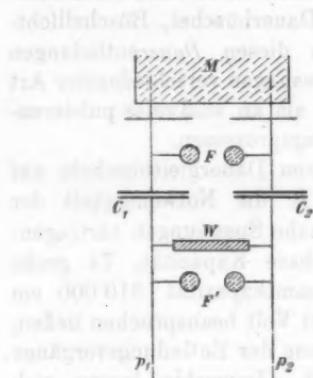


Fig. 2a.

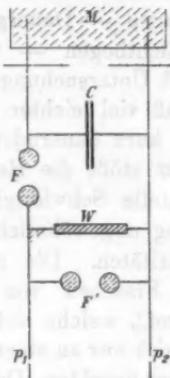


Fig. 2b.

In Fig. 2a ist die für Kapazitäten vom Gesamtbetrag bis 60 000 cm benutzte Versuchsanordnung skizziert:

1) Vgl. M. Toepler, Ber. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1907, p. 422; Physik. Zeitschr. 8, p. 743 u. 919. 1907.

- M* bedeutet eine 60 plattige Toeplermaschine,
F „ Primärfunkenstrecke zwischen Messingkugeln von je
 6 cm Durchmesser,
C₁ u. *C₂* „ zwei gleiche Leidener Flaschenbatterien,
W „ Wasserwiderstand von ca. $5 \cdot 10^6$ Ohm,
F' „ Kontrollfunkenstrecke, ebenfalls zwischen Messingkugeln
 von je 6 cm Durchmesser.

Sollte die Kapazität der Leidener Flaschen voll ausgenutzt werden, so wurde die Anordnung der Fig. 2 b benutzt.

Beide Anordnungen liefern plötzlich vom Augenblicke des Funkenausbruches *F* ab, eine Spannungsdifferenz zwischen *p₁* *p₂*, welche nach Maßgabe der Leitfähigkeit im Troge abklingt (*W* kommt nur für die Batterieladung in Frage, da es stets groß war gegen den Widerstand zwischen *p₁* *p₂*). Es bildet sich von *p₁* aus nach *p₂* zu ein Gleitbüschel.

B. Büschellänge in Abhängigkeit von Spannung und Leitfähigkeit. — In nachstehenden Tabellen seien gemessene Gleitbüschellängen zusammengestellt, wie dies schon für die Trogtiefe 6 cm und 2 cm am letzt zitierten Orte geschehen ist. Vorliegende Messungen unterscheiden sich außer durch die Trogtiefe von den genannten noch darin, daß die zwischen *p₁* *p₂* wirklich erreichte Spannung *P'* durch Messung von *F'* kontrolliert wurde und daß den einzelnen Bestimmungen durch größere Zahl der Einzelbeobachtungen etwa die doppelte Sicherheit zukommt.

Tabelle I.

Versuchsanordnung der Fig. 2a. Trogbreite 1,0 cm, Trogtiefe 4,0 cm.
p₁ Anode, d. h. positive Gleitbüschel.

Leitfähigkeit λ der Flüssigkeit ($Hg = 10630$)	<i>F</i> in em	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	<i>P':P'</i>
		<i>P</i> in Kilovolt	8,8	17,1	25,2	32,6	39,7	46,4	
1. Batteriekapazität 20000 cm									
13,3 . 10^{-6}		1,5	8,1	19,8	37,5	59,5	81,5	101	—
39,8 . 10^{-6}		2,5	12,5	26,5	42	61,5	82	—	1,00
336 . 10^{-6}		3,3	11,0	22,5	33	45,5	58	68	1,00
5370 . 10^{-6}		1,6	6,8	10,5	14	17	20	22,5	1,14
21 000 . 10^{-6}		1,2	3,6	5,6	7,7	9,6	11,2	12,6	1,35
83 000 . 10^{-6}		0,6	1,6	2,3	3,0	4,2	5,5	6,2	1,85
215 000 . 10^{-6}		—	—	1,0	1,4	1,9	2,3	2,8	2,51

Tabelle I (Fortsetzung).

Leitfähigkeit λ der Flüssigkeit (Hg = 10630)	F in em	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	$P : P'$
		8,8	17,1	25,2	32,6	39,7	46,4	52,8	

2. Batteriekapazität 57000 cm.

$17,4 \cdot 10^{-6}$		1,8	10,8	26,8	49,8	82,4	—	—	—
$37,1 \cdot 10^{-6}$		3,4	14,5	34,5	57	84	104	—	1,00
$39,8 \cdot 10^{-6}$		3,3	16,5	36	57	85	—	—	—
$836 \cdot 10^{-6}$		4,1	17,5	33	48	65	84	97	1,00
$5370 \cdot 10^{-6}$		2,5	10	16,6	22,5	26	32,5	37	1,15
$21\,000 \cdot 10^{-6}$		2,3	6,8	10,0	13,2	16,2	19	21	1,36
$83\,000 \cdot 10^{-6}$		1,2	2,9	4,5	5,8	7,6	9,8	11,0	1,90
$215\,000 \cdot 10^{-6}$		0,5	1,1	1,9	2,6	3,2	4,0	5,3	2,54

Tabelle II.

Versuchsanordnung der Fig. 2 b.

Trogbreite 1,0 cm, Trogtiefe 4,0 cm.

 p_1 Anode, d. h. positive Gleitbüschel.

Leitfähigkeit λ der Flüssigkeit (Hg = 10630)	F in em	0,25	0,35	0,50	0,65	0,75	$P : P'$
		8,8	12,8	17,1	22,0	25,2	

Batteriekapazität 310000 cm

$7,15 \cdot 10^{-6}$		0,9	2,4	6,5	14,5	22	—
$9,53 \cdot 10^{-6}$		—	3,3	8,3	19,0	—	—
$22,1 \cdot 10^{-6}$		2,5	—	15,8	32,5	45	—
$52,3 \cdot 10^{-6}$		4,6	—	34,9	63	85	—
$248 \cdot 10^{-6}$		13,2	—	44,5	68	83	1,00
$5000 \cdot 10^{-6}$	beobachtet	11,6	—	26	37	42	1,10
	berechnet (Faktor 1,1)	12,8	—	28,6	41	46	—
$215\,000 \cdot 10^{-6}$	beobachtet	1,6	—	3,3	—	4,7	2,5
	berechnet (Faktor 2,5)	4,0	—	8,3	—	11,8	—

In Figg. 3 und 4 sind als Abszissen die Logarithmen der Leitfähigkeit λ gewählt, als Ordinaten die Gleitbüschellängen

eingetragen und die Werte für je gleiche Kapazität und Spannung zu Kurvenzügen verbunden. Fig. 3 gilt für ver-

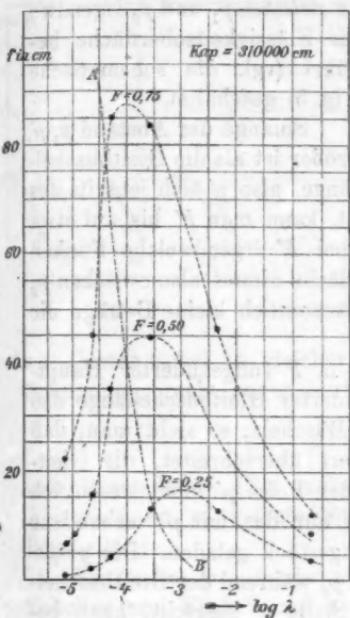


Fig. 3.

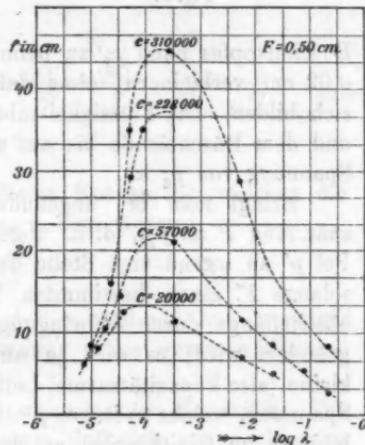


Fig. 4.

schiedene Spannungen bei gleicher Kapazität, Fig. 4 für verschiedene Kapazitäten aber gleiche Spannung.

C. Korrektionsfaktor $P: P'$. Beide Figuren geben für große Leitfähigkeit die jeweils mit dem Faktor $P: P'$ korrigierten Werte. In den Tabellen findet sich immer für bestimmte Leitfähigkeit nur ein einziges Verhältnis angegeben. Dies genügt, da zahlreiche Messungen zeigten, daß dies Verhältnis (innerhalb der Versuchunsicherheitsgrenzen) für bestimmtes λ unabhängig vom Absolutwerte von P ist. Sobald $P: P'$ über 1 hinauswächst, ist also die durch p_1 abfließende Elektrizitätsmenge während des Spannungsanstieges in p_1 schon so groß, daß überhaupt nicht mehr die volle Spannung P erreicht wird, d. h. die Plötzlichkeit des Spannungsanlegens läßt bei dem gewählten Mechanismus schließlich zu wünschen übrig.

D. Spannungsmessung längs des Gleitbüschels. Es sei die Funkenstrecke F' nicht zwischen p_1 und p_2 , sondern zwischen p_2 und eine Platinelektrode p' , welche zwischen p_1 und p_2 irgendwo

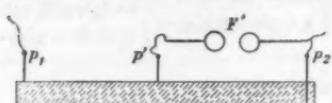


Fig. 5.

die Flüssigkeitsoberfläche berührt (vgl. die schematische Fig. 5) geschaltet.

Solange der Abstand $p_1 p'$ größer ist als die Gleitbüschellänge, also p' sich jenseits des

Büschelkopfes nach p_2 zu befindet, kann man F' bis auf etwa 0,02 cm verkleinern, ohne daß bei F' irgendwelche Funken sich bilden. Die Flüssigkeitsoberfläche nimmt also zwischen p_2 und dem Büschelende bis auf unwesentlich kleine Beträge die Spannung von p_2 an.

Bringt man bei ungeändertem F (ungeänderter Hauptspannung P an p_1), d. h. ungeänderter Gleitbüschellänge den Pol p' an irgend eine Stelle des Büschels, so sieht man, daß solange F' einen bestimmten Wert überschreitet, die Gleitbüschellänge durch Anbringung des Poles p' nicht wesentlich geändert wird; es wird ja auch nur das mit p' verbundene kleine (also kapazitätsarme) Leitungsstück geladen. Die größte Spannung, welche zwischen p' und p_2 während der Gleitbüschelbildung im Gleitbüschel an der Stelle p' herrscht, kann bestimmt werden, indem man F' langsam so lange verkleinert, bis zum ersten Male ein Funken bei F' (und natürlich damit ausgelöst ein Gleitfunken zwischen p_1 und p') erscheint.

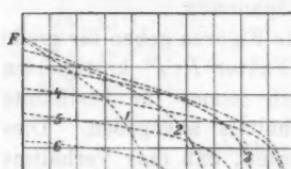


Fig. 6.

Bei ungenügender Kapazität erhält man so durch Messung von F' an verschiedenen Stellen längs des Büschels die Einhüllende der Spannungskurven, welche längs des wachsenden Gleitbüschels nacheinander während des Wachses herrschen (vgl. Fig. 6).

Bei genügender Kapazität geht diese Einhüllende naturgemäß über in die Spannungskurve längs des Dauerbüschels.

Es genüge, in Fig. 7 einige derartige einhüllende Kurven für eine bestimmte Primärspannung ($F = 1,50$ cm, entsprechend 46,4 K.V.) und für bestimmte Kapazität (57000 cm) dar-

zustellen; die beobachteten Werte F' sind markiert. Für die große Kapazität von 0,34 Mikrof. erhält man bei Annäherung

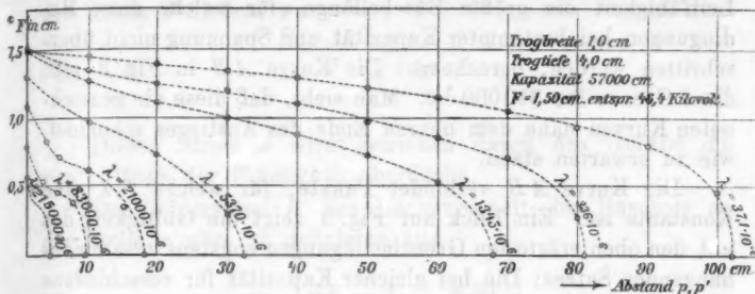


Fig. 7.

an Dauerbüschel in gleicher Weise Kurven, bei welchen die Spannung p recht angenähert nach dem Gesetze

$$P^3 = \frac{P^2}{f} \cdot x$$

vom Büschelkopfe (Nullpunkte der x -Zählung) aus ansteigt; P ist die an p_1 gelegte Spannung, f die gesamte (Dauer-) Büschellänge.

E. Grenze genügender und ungenügender Kapazität. Die Tabellen und Figg. 3 und 4 zeigen, daß sich mit wachsender Leitfähigkeit zwei Gebiete von ganz verschiedenem Verhalten (Ansteigen und Abfallen der Länge) unterscheiden lassen — Gebiete genügender und ungenügender Kapazität. Vor Eingehen auf die uns hier weiterhin allein interessierenden Gesetze des ersten Gebietes sei für dieses auch noch auf anderem Wege eine Grenze zu ziehen gesucht.

Als äußersten Fall von Dauerbüschel wird man den bezeichnen können, bei dem während der vollen Gleitbüschelbildung die Spannung nur um 3 Proz. heruntergeht, die erreichte Büschellänge also um höchstens 10 Proz. von der maximalen abweicht. Aus den Messungen der Dauer von Gleitfunkenbildung auf Platten mit der Schlierenmethode folgt¹⁾, daß die Gleitbüschelbildung mindestens 10^{-5} Sek. erfordert. Nimmt man zur Grenzberechnung ferner an, daß während dieser Zeit längs

1) M. Toepler, Ann. d. Phys. 21. p. 212, Fig. 10. 1906.

der ganzen größten Büschellänge die Spannung des Poles p_1 auf der Flüssigkeitsoberfläche aufliegt, so läßt sich für jede Leitfähigkeit die größte Büschellänge, für welche diese Bedingungen bei bestimmter Kapazität und Spannung nicht überschritten werden, berechnen. Die Kurve AB in Fig. 3 gibt diese Grenze für 310000 cm. Man sieht, daß diese die gezeichneten Kurven nahe dem oberen Ende des Anstieges schneidet, wie zu erwarten stand.

Die Kurve AB verbindet Punkte, für welche $f \cdot \lambda$ eine Konstante ist. Ein Blick auf Fig. 3 zeigt die Gültigkeit des mit den oben erörterten Grenzbedingungen engstens zusammenhängenden Satzes: Die bei gleicher Kapazität für verschiedene Spannungen erreichbare *größte Gleitbüschellänge ist der Leitfähigkeit der Bahnlängeneinheit umgekehrt proportional*. Weiter folgt gleichfalls aus der Parallelität der Verbindungslinie der Maxima für f mit der Kurve AB , daß die zum Erreichen der maximalen Länge nötige Zeit nahezu unabhängig von der Länge f (bzw. der benutzten Spannung F) ist.

II. Die Gesetze des Gleitbüschels von genügend großer Existenzdauer.

Für ein dauernd bestehendes Gleitbüschel lassen sich eine Reihe interessanter Beziehungen aufstellen und durch Vergleich mit den Beobachtungen Einblicke in die Gesetze desselben gewinnen.

Vom Büschelende aus gesehen wächst die Spannung längs des Büschels an. Das Gesetz dieses Anwachsens sei

$$(1) \quad p = q(x)$$

bezeichnet. Es sei die Trogtiefe so klein, daß man annehmen kann, die Strömung in der Flüssigkeit erfolge überall senkrecht durch die Schicht, von der Oberfläche (dem Büschel) zur Quecksilberunterlage. Dann fließt an jeder Stelle x aus der Büschellängeneinheit der vertikale Strom

$$(2) \quad i = p \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot b,$$

wo p die Spannung an der Stelle x , λ die Leitfähigkeit der Flüssigkeit, τ die Trogtiefe, b die Trogbreite bedeutet.

Es sei b speziell stets gleich 1 cm gewählt.

An der gleichen Stelle x muß dann *horizontal* längs der Flüssigkeitsoberfläche von x nach dem Büschelende zu dauernd der Strom J fließen, wo

$$(3) \quad J = \int_0^x i \, dx.$$

Dieser Strom J wird getrieben durch das Gefälle Δp von p längs der Flüssigkeitsoberfläche.

Der Widerstand W der Längeneinheit des Büschels an der Stelle x wäre zu definieren aus

$$(4) \quad W = \frac{\Delta p}{J} = \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{\varphi'(x)}{\int_0^x \varphi(x) \, dx}.$$

Durch Messung der Spannung p an verschiedenen Stellen des Dauerbüschels (also von $\varphi(x)$), wie oben in Abschnitt I, D. geschildert (vgl. Fig. 7), läßt sich also bei Kenntnis der Leitfähigkeit der Bahnlängeneinheit (d. h. von λ/τ) ohne weiteres W finden, wohl die einfachste Methode zur Bestimmung von Widerständen im Büschelstiele. Bei dem noch nicht völligen Genügen der Kapazität erscheint es jedoch zweckmäßig, Gesetze für W nicht auf einzelne Messungen, sondern auf die *allgemeinen* für angennähert hinreichende Kapazität geltenden Beziehungen zu gründen.

Die Beobachtungen und Messungen zeigten, daß:

- die Büschellänge f proportional ist der Leitfähigkeit λ ,
- " " " f umgekehrt proportional der Trogtiefe τ ,
- " " " f proportional der *dritten* Potenz¹⁾ der Spannung P am Pole p_1 .

Also gilt

$$(5) \quad f = x \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot P^3.$$

1) Wie aus den in vorliegender Arbeit mitgeteilten Messungen hervorgeht, gehört die früher (vgl. Physik. Zeitschr. I. c. und Berichte der Deutsch. Physik. Gesellschaft I. c.) behauptete Proportionalität mit der *zweiten* Potenz der Spannung noch dem *Übergangsgebiete* von ungenügender zu genügender Kapazität an.

Ferner zeigten die Beobachtungen, daß p vom Büschelende aus nach dem gleichen Gesetze zum Büschelanfange zu aufsteigt, daß also auch

$$(6) \quad x = z \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot p^3$$

ist, so daß erfahrungsgemäß

$$(7) \quad p = \varphi(x) = \left(\frac{\tau}{z \cdot \lambda} \right)^{1/3} \cdot x^{1/3}$$

wird. Hieraus folgt

$$(8) \quad J = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\lambda^2}{\tau^2 \cdot z} \right)^{1/3} \cdot x^{4/3},$$

$$(9) \quad \Delta p = \frac{1}{3} \left(\frac{\tau}{z \cdot \lambda} \right)^{1/3} \cdot x^{-2/3}$$

und

$$(10) \quad W = \frac{4}{9} \cdot \frac{\tau}{\lambda} \cdot x^{-2}.$$

Der Widerstand im Büschelstiel ist umgekehrt proportional der Leitfähigkeit der Bahnlängeneinheit ($\lambda:\tau$) und umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes vom Büschelkopfe.

Will man dieses Widerstandsgesetz mit den sonst gefundenen Beziehungen für Funkenwiderstände und ähnliche Größen vergleichen, so ist es zweckmäßig, dieses auf die hier übliche Form

$$(11) \quad W = \frac{a}{J^n}$$

zu bringen.

Man erhält aus (8) und (10)

$$(12) \quad W = \frac{1}{2 \cdot \sqrt[3]{3z}} \cdot \frac{1}{J^{5/2}}.$$

Als Charakteristik würde hiernach für den Büschelstiel (*Dauerbüschel*) folgen

$$(13) \quad V = \frac{1}{2 \sqrt[3]{3z}} \cdot \frac{1}{\sqrt{J}} = \frac{a}{\sqrt{J}},$$

wo V das Gefälle (Volt:cm), J die Stromstärke und a und z Konstanten bedeuten.

Die Charakteristik verläuft umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Stromstärke.

Schon öfters habe ich auf die Identität eines Büschelstiellückes mit einem Stück Büschellichtbogens¹⁾ (des von mir

1) M. Toepler, Wied. Ann. 63. p. 109. 1897; 66. p. 660. 1898.

zuerst in freier Luft hergestellten Glimmstromes) hingewiesen. Für letzteren hat Kaufmann¹⁾ dann die Gültigkeit eines Gesetzes genau wie (13) gefunden (V proportional $1/\sqrt{J}$), während Stuchtey²⁾ seine Messungen am Büschellichtbogen durch die nicht allzusehr abweichende Beziehung V proportional $1:J^{0,491}$ wiedergibt.

Gleitbüschel und Büschellichtbogen besitzen demnach die gleiche Charakteristik.

Aus der Kenntnis der Charakteristik des Büschellichtbogens lassen sich natürlich auch umgekehrt die Gesetze des Gleitbüschels ohne weiteres ableiten.

Zu diesen allgemeinen Ergebnissen ist schließlich noch einiges über den Wert der Konstanten a hinzuzufügen.

Aus vorliegenden Messungen würde sich a zu etwa 350 für das Beobachtungsbereich von ca. 0,01 bis 5 Amp. Stromstärke J im Gleitbüschelstiele ergeben.³⁾

Aus meinen Messungen über Büschellichtbogen ergibt sich für 0,5 bis 2 Milliamp. a zu 100 bei Bogenlängen bis 1 cm.

Aus den Angaben von Stark⁴⁾ rechnet sich a zu 125 bis 150 (Stromstärken 9,6 bis 62 Milliamp.).

1) W. Kaufmann, Physik. Zeitschr. 4. p. 578. 1908.

2) C. Stuchtey, Diss. Bonn 1904.

3) Im einzelnen erhält man aus Tab. II vermittelst x aus Gleichung (5)

für $\lambda = 7,15 \cdot 10^{-6}$ a zu 336, 395, 339, 331, 329 und

für $\lambda = 9,53 \cdot 10^{-6}$ a zu —, 389, 346, 334, —. Die Werte

für $\lambda = 22,1 \cdot 10^{-6}$ a zu 354, —, 382, 388, 405

zeigen schon beginnendes Ungenügen der verwandten Kapazität. Die größten Stromstärken J im Büschelstiele werden [in Gleichung (8) ist $x = f$ zu setzen]:

für $\lambda = 7,15 \cdot 10^{-6}$ 0,010; 0,044; 0,149; 0,427; 0,743 Amp.

für $\lambda = 9,53 \cdot 10^{-6}$ — ; 0,080; 0,254; 0,747; — "

für $\lambda = 22,1 \cdot 10^{-6}$ 0,891; — ; 1,09 ; 2,89 4,59 "

Es sei noch bemerkt, daß man durch Einführung eines mit J langsam ansteigenden Exponenten von J in die Charakteristikengleichung (13) einerseits noch besseren Anschluß an die Messungen von Stuchtey gewinnen, andererseits die vorliegenden Beobachtungen noch etwas weiter in das Gebiet größerer J bzw. λ hinein darstellen kann.

4) J. Stark, Physik. Zeitschr. 4. p. 535. 1908.

Kaufmann findet zwischen 0,9 und 20 Milliamp. a zu rund 160, während Stuchtey die Konstante zu 110 angibt.¹⁾

Bei einem Vergleiche hat man zu berücksichtigen, daß der Gleitbüschel ja auch bei der größten Kapazität noch nicht ganz als *Dauererscheinung* aufzufassen ist, und daß meine Büschel auf einer *Flüssigkeitsoberfläche auflagen*, also in einer Atmosphäre sich befinden, die mit freier Luft nicht identisch ist. In Anbetracht dieser Umstände und der Verschiedenartigkeit der Bestimmungsmethoden ist die Übereinstimmung wohl noch als recht gute zu bezeichnen.

Mit den Gleitbüscheln auf Flüssigkeitsoberflächen stehen solche auf Isolatoren (Rohren und Platten) in engster Beziehung. Durch die voranstehend gewonnenen Erkenntnisse ist also das ganze Gebiet der Gleitfunkenbildung überhaupt qualitativ und, soweit die Umstände es erwarten lassen, auch quantitativ an die bekannten Gesetze von Gasentladungen geschlossen.

Dresden, den 30. Januar 1908. Physikalisches Institut
der Technischen Hochschule.

1) Die angegebenen Zifferwerte sind auf Gefälle in Volt : cm und Stromstärken in Amp. umgerechnet.

(Eingegangen 31. Januar 1908.)

*7. Über Schwankungen der radioaktiven
Strahlung und eine Methode zur Bestimmung des
elektrischen Elementarquantums;
von Edgar Meyer und Erich Regener.*

§ 1. Hat man einen einheitlichen radioaktiven Körper vor sich, so nimmt dessen radioaktive Strahlung bekanntlich mit der Zeit ab, und zwar erfolgt diese Abnahme nach dem Exponentialgesetze:

$$J_t = J_0 e^{-\lambda t},$$

wobei J_0 die Anfangsaktivität, J_t die nach Ablauf einer gewissen Zeit t noch vorhandene Aktivität bedeutet. λ ist eine Konstante, die sogenannte „Abklingungskonstante“, die für die verschiedenen radioaktiven Substanzen charakteristische Werte besitzt. Dieses Gesetz ist von Rutherford und Soddy aus ihrer Zerfallstheorie abgeleitet worden. Nach den Vorstellungen dieser Theorie sind die Atome der radioaktiven Körper instabil, sie besitzen nur eine bestimmte mittlere Lebensdauer, die durch den Wert $1/\lambda$ gegeben ist.

§ 2. Es wäre nun an sich wohl denkbar, daß bei einem radioaktiven Körper zu einer gewissen Zeit plötzlich alle Atome explosionsartig zerfallen würden. Daß das nicht der Fall ist, liegt daran, daß das Ende der Lebenszeit jedes einzelnen Atoms zu verschiedenen Zeiten erreicht wird. Da wir in dem einzelnen Falle nicht die Gründe dafür anführen können, weshalb ein Atom früher oder später zerfällt, so müssen wir sagen, daß der Zeitpunkt des Zerfalles eines Atoms durch den Zufall bestimmt wird. Hier ist der Begriff des Zufalles so zu nehmen, wie er in der Wahrscheinlichkeitsrechnung definiert wird.¹⁾ Aus dem Gesagten geht hervor, daß man auf den Zerfall der radioaktiven Atome die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwenden kann.

1) Z. B. Weber u. J. Wellstein, Enzyklopädie der Elementar-Mathematik 3. p. 358. Leipzig 1907.

Das hat nun E. v. Schweidler¹⁾ in einer Abhandlung „Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung“ getan. Er leitet das obige Exponentialgesetz folgendermaßen ab. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom in einer gegebenen Zeit zerfällt, wird proportional dieser Zeit sein. Bezeichnet man also die Wahrscheinlichkeit, daß ein Atom in der sehr kleinen Zeit dt zerfällt, mit λdt , so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß es in der Zeit t nicht zerfällt, $e^{-\lambda t}$. Bei einer sehr großen Anzahl N gleichartiger radioaktiver Atome wird daher, entsprechend dem Gesetz der großen Zahlen, die Anzahl der nach der Zeit t noch vorhandenen Atome gegeben sein durch

$$n = Ne^{-\lambda t}.$$

Das ist aber gleichbedeutend mit dem Gesetze $J_t = J_0 e^{-\lambda t}$, da die Aktivität eines Stoffes in jedem Momente der Zahl der zu dieser Zeit noch unverwandelt gebliebenen Atome proportional ist.²⁾

Hat man aber eine *nicht sehr große* Anzahl radioaktiver Atome vor sich, so wird die Abnahme ihrer Anzahl mehr oder weniger von diesem idealen Exponentialgesetz abweichen, d. h. n und damit J_t wird gewissen Schwankungen unterworfen sein. Die Größe dieser „Streuung“ wurde von Hrn. v. Schweidler ebenfalls berechnet. Er verfährt folgendermaßen³⁾:

Können in einer Reihe von s Versuchen nur zwei einander ausschließende Ereignisse A und B mit den Wahrscheinlichkeiten p bzw. q eintreten, so ist die Wahrscheinlichkeit W , daß m_1 , die Zahl der für A günstigen Fälle zwischen den Grenzen $ps \pm \nu$ und gleichzeitig m_2 , die Zahl der für B günstigen Fälle zwischen den Grenzen $qs \pm \nu$ liegt, gegeben durch:

$$W = \frac{2}{V\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{1}{2spq}}} e^{-t^2} dt.$$

1) E. v. Schweidler, Premier Congrès international pour l'étude de la Radiologie et de l'Ionisation, Liège 1905: „Über Schwankungen der radioaktiven Umwandlung“; Beibl. 31. p. 356. 1907.

2) Rutherford-Aschkinass, Die Radioaktivität p. 240. 1907.

3) Gegeben nach K. W. F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. Wiener Akad. 115. Abt. II a. p. 673. 1906.

Nach einer Formel der Fehlerrechnung¹⁾ ist aber die obere Integralgrenze das Produkt aus der Grenze, die der Fehler nicht übersteigen soll, und aus h , dem sogenannten „Maße der Präzision“. Aus h ergibt sich der mittlere Fehler zu:

$$\eta = \frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

Diese Formel wird nun auf folgenden Fall angewendet. Es seien N radioaktive Atome mit der Abklingungskonstante λ gegeben. Nach einer gewissen Zeit δ ist die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Atom noch nicht zerfallen zu sein, $e^{-\lambda\delta}$, die zerfallen zu sein $1 - e^{-\lambda\delta}$. Setzt man

$$1 - e^{-\lambda\delta} = \alpha, \quad e^{-\lambda\delta} = 1 - \alpha,$$

so ergibt sich:

$$s = N; \quad p = 1 - \alpha; \quad q = \alpha.$$

Daher wird die Wahrscheinlichkeit W' , daß die Anzahl m_2 der in der Zeit δ zerfallenden Atome zwischen den Grenzen $N\alpha \pm N\alpha\sigma$ liegt:

$$W' = \frac{N\alpha\sigma}{V^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{1}{2N\alpha(1-\alpha)}} e^{-t^2} dt.$$

Da nun $N\alpha\sigma$ die Fehlergrenze ist, so ist

$$h = \frac{1}{\sqrt{2N\alpha(1-\alpha)}}$$

und

$$\eta = \sqrt{N\alpha(1-\alpha)}$$

der mittlere Fehler.

Drückt man noch diesen mittleren Fehler in Bruchteilen des normalen Wertes αN aus, so ergibt sich, wenn man diesen prozentuellen Fehler mit $\bar{\epsilon}$ bezeichnet:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\eta}{N\alpha} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{N\alpha}}.$$

Nimmt man jetzt δ klein gegen die mittlere Lebensdauer $1/\lambda$ eines Atoms, dann ist α sehr klein, $1 - \alpha$ nahe gleich 1, und man erhält:

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{N\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{Z}},$$

d. h.: Die mittlere Schwankung ist nur abhängig von der Zahl Z ,

1) Enzyklopädie der mathem. Wissenschaften 1. D. 2.

der Anzahl von Atomen, die bei strenger Gültigkeit des Gesetzes $n = Ne^{-\lambda t}$ innerhalb der Zeit δ zur Umwandlung gelangen würden, und zwar gleich der reziproken Wurzel aus dieser Zahl.

§ 3. Diese Schweidlersche Beziehung versuchte K. W. Fritz Kohlrausch¹⁾ experimentell zu verifizieren. Es sei uns hier erlaubt zu bemerken, daß Hr. K. W. F. Kohlrausch diese Schwankungen der radioaktiven Umwandlung nicht als erster beobachtet hat. Bronson²⁾ fand nämlich bei der Verwendung seines radioaktiven Luftwiderstandes bei der „Methode der konstanten Ausschläge“ zur Messung an radioaktiven Substanzen, daß die Elektrometernadel nicht ruhig in der abgelenkten Stellung verblieb, sondern noch kleinere unregelmäßige Schwankungen ausführte. Da er auf das sorgfältigste Luftströmungen sowie elektrostatische Störungen ausschloß, kam er selbst zu dem Schlusse: „The most probable explanation seems to be that it is due to exceedingly small and rapid changes in the ionisation current itself“.

§ 4. K. W. F. Kohlrausch verwandte bei der Prüfung der Schweidlerschen Beziehung eine Differentialmethode. Zwei Messingkästen waren mit den Enden einer Akkumulatorenbatterie verbunden, deren Mitte geerdet war. Auf den Böden der Kästen befanden sich zwei nahezu gleich starke Poloniumpräparate. In die Kästen ragten Elektroden hinein, die untereinander und mit dem einen Quadrantenpaare eines Dolezalek-Elektrometers verbunden waren. Da die Poloniumpräparate nicht gleich stark waren, zeigte das Elektrometer langsame Aufladung an. Die Aufladung, die das Elektrometer in einer Minute erfuhr, war nun bei verschiedenen Beobachtungen ganz verschieden, damit Schwankungen der Strahlung der Poloniumpräparate in den Messingkästen anzeigen. Aus einer größeren Anzahl von Beobachtungen rechnet Hr. Kohlrausch die mittlere Abweichung nach der bekannten Formel $\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}}$ aus. Hr. Kohlrausch zeigt, daß diese Abweichungen und damit die mittlere Schwankung der Strahlung der Polonium-

1) K. W. F. Kohlrausch, Sitzungsber. der Wiener Akad. 115. Abt. IIa. p. 673. 1906.

2) H. L. Bronson, Amer. Journ. Science, Februar 1905; Phil. Mag. (6) 11. p. 148. 1906.

präparate von der an die Messingkästen angelegten Spannung in der Weise abhängig ist, daß die Schwankungen am kleinsten ausfallen bei der kleinsten an die Kästen angelegten Spannung, um bei höheren Spannungen einem Grenzwerte zuzustreben. Das Aussehen der Kurve, die die Abhängigkeit der Schwankungen von der Spannung widergibt, ist also das gleiche, welches die Abhängigkeit des durch die Kästen fließenden Stromes von der Spannung zeigt. Einen Vergleich der beobachteten Schwankungen mit den nach der Theorie des Hrn. v. Schweidler berechneten lassen die Beobachtungen des Hrn. Kohlrausch aber nur in beschränktem Maße zu, da aus den Beobachtungen nur ein Wert zum Vergleich herangezogen werden darf, nämlich der bei Sättigungsstrom. Um nun die Schweidlersche Beziehung allgemein zu prüfen, wurden die folgenden Versuche unternommen. Die Verfasser konnten mit Hilfe einer empfindlichen Versuchsanordnung die Schwankungen leicht nachweisen und die Beziehung $\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ durch Variieren von Z bestätigen.

Auch wurde der Einfluß der Versuchsbedingungen auf die Schwankungen untersucht.

§ 5. Die benutzte Versuchsanordnung war folgende (vgl. Fig. 1). Die untersuchte Radiotellurplatte P , eine Cu-Platte

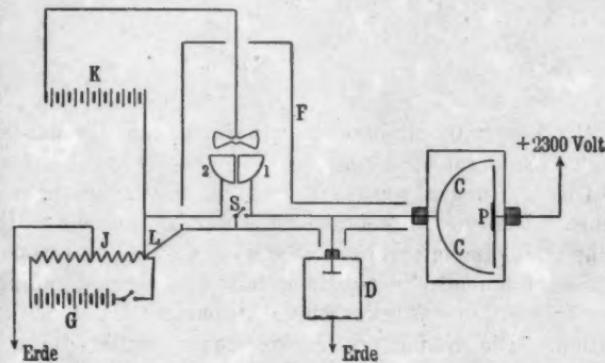


Fig. 1.

von 4 cm Durchmesser, die auf einer Seite mit RaF belegt war (bezogen von Sthamer, Hamburg), war auf einer mit Hartgummi isolierten Messingplatte von 11 cm Durchmesser

befestigt. Die von dem RaF ausgehenden α -Strahlen haben in Luft eine Reichweite von ungefähr 4 cm, d. h. sie sind in einer Entfernung von 4 cm vollständig absorbiert. Um die durch die Absorption der Strahlen hervorgerufene Ionisation vollständig zur Messung zu bringen, befand sich der Poloniumplatte *P* gegenüber die Elektrode *CC* aus Messing in Form einer Halbkugel. Sie wurde durch eine Isolation von Bernstein getragen. Der Durchmesser der Halbkugel betrug 18 cm, so daß die Entfernung der Halbkugel von der Poloniumplatte überall größer als 4 cm, die Reichweite der α -Strahlen, war. Dadurch wurde auch erreicht, daß Schwankungen von Druck und Temperatur, die die Reichweite der α -Strahlen verändern, ohne Einfluß auf den mit dieser Anordnung gemessenen Ionisationsstrom blieben. Das Ganze befand sich in einem Messingkasten, der geerdet oder auf ein anderes Potential gebracht werden konnte. Auf die Radiotellurplatte konnten noch Blenden aufgeschoben werden. Es waren Messingbleche von 1 mm Dicke, die zentrische Bohrungen von folgenden Dimensionen besaßen:

Blende Nr.	Durchmesser der Bohrung
1	6,1 mm
2	12,5 "
3	18,4 "
4	24,0 "
5	30,1 "
6	36,1 "

Mit Blende 0 soll bezeichnet werden, daß das ganze unbedeckte Präparat strahlte.

Die Messungen wurden immer bei Sättigungsstrom ausgeführt. Um diesen herzustellen, war *P* mit einer Hochspannungsakkumulatorenbatterie von etwa 2300 Volt verbunden; *CC* war in leitender Verbindung mit dem einen Quadrantenpaare 1 eines Dolezalekschen Elektrometers *F* mit Bernsteinisolation. Die Nadel des Elektrometers wurde durch eine besondere Hochspannungsbatterie *K* meistens auf etwa 210 Volt geladen. Der Aufhängedraht der Nadel war ein dünner Wollastondraht. Die Empfindlichkeit des Instrumentes betrug im allgemeinen etwa 2300 Skt. Ausschlag pro 1 Volt. Es wurde jedoch auch manchmal bei sehr viel geringerer Empfind-

lichkeit gemessen. Nach jedem Versuch wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers neu bestimmt.

CC war gleichzeitig noch mit dem einen Ende eines Widerstandes *D* nach Bronson¹⁾ verbunden, dessen anderes Ende geerdet war. Er bestand aus einer Messingbüchse *D*, auf deren Boden Poloniumpräparate ausgebreitet wurden. Von oben ragte eine Messingelektrode hinein, die durch Bernstein isoliert war. Es wurde so der durch die Poloniumzelle *P* fließende Strom durch die an den Enden des Bronsonwiderstandes auftretende Potentialdifferenz gemessen. Durch Aufnahme der Stromspannungskurve wurde festgestellt, daß sich der Widerstand innerhalb der Spannungen, die bei unseren Versuchen auftraten, als Ohmscher Widerstand verhielt.²⁾

Wir haben im Laufe der Untersuchung eine große Anzahl verschiedener solcher Widerstände benutzt. Immer verwandten wir RaF-Präparate zum Ionisieren. Durch Einlegen von verschiedenen Präparaten konnte man einen Widerstand von passender Größe erhalten. Es empfiehlt sich das besser, als den Plattenabstand zu variieren. Denn es ist günstig, wenn der Ionisationsraum so groß ist, daß alle α -Teilchen ganz in der Luft absorbiert werden. Man ist dann unabhängig von Schwankungen des Luftdruckes und der Temperatur.

§ 6. Um nun Änderungen des Potentials des Quadrantenpaars 1 und mithin des Stromes genau messen zu können, wurde eine Kompensationsmethode verwandt.

G ist eine dritte Hochspannungsbatterie von etwa 140 Volt, bei der aber mehrere Batterien parallel geschaltet waren. Dieses geschah zur Vergrößerung ihrer Kapazität, da es sehr darauf ankam, daß diese Spannung konstant war. Änderte sie sich nur um geringe Bruchteile, so bekam man eine stetige Wanderung der Elektrometernadel, die sich über die zu messenden Stromschwankungen überlagerte. Diese Batterien waren durch einen Widerstand *J* von über 100 000 Ohm geschlossen. An *J* konnte man abzweigen und eine beliebige Spannung an das andere Quadrantenpaar 2 des Elektrometers anlegen. Man kompensierte so die mittlere Spannung, die

1) H. L. Bronson, l. c.

2) Der Sättigungsstrom durch die Bronzonzele *D* war 12 mal stärker als derjenige, welchen das Poloniumpräparat *P* gab.

sich auf *CC* ausbildete, und das empfindliche Elektrometer zeigte nur noch die Schwankungen des von *P* nach *CC* übergehenden Stromes an. War z. B. die Empfindlichkeit des Elektrometers 2000 mm pro 1 Volt und war die Kompensationsspannung 50 Volt, so entsprach ein Ausschlag des Elektrometers von 1 mm einer Änderung der Spannung des Quadranten 1, mithin des Stromes um

$$\frac{1}{2000 \cdot 50} = 0,001 \text{ Proz.}$$

Gleichzeitig ergab diese Kompensationsspannung in Verbindung mit dem Werte des Bronsonwiderstandes (Größenordnung 10^{10} Ohm) auch die Stärke des jeweiligen Sättigungsstromes. Das Elektrometer, die Poloniumzelle, der Bronsonwiderstand, sowie alle Verbindungen waren in leitende, miteinander in Verbindung stehenden Metallhüllen eingebaut.

Da die sich auf *CC* ausbildenden Spannungen (bis 90 Volt) nicht mehr gegenüber der Nadelspannung des Elektrometers zu vernachlässigen waren, so nahm die Empfindlichkeit des Elektrometers mit Wachsen der Spannung auf *CC* stark ab. Wir haben diesen Übelstand folgendermaßen verhindert. Das Elektrometergehäuse sowie der zweite Pol der Batterie *K*, die die Nadel auflud, wurde ebenfalls auf das Potential der Kompensationsspannung gebracht, d. h. es wurde dafür gesorgt, daß in allen Fällen die Potentialdifferenz zwischen der Nadel und den Quadranten dieselbe blieb. Diese Schaltung hat sich sehr bewährt. Die Empfindlichkeit des Elektrometers blieb ganz konstant, wenn auch die Kompensationsspannung von 0,5 Volt auf 90 Volt stieg. Bei der Einstellung der Kompensationsspannung blieb der Schlüssel *S* zunächst geschlossen. Beim vorsichtigen Öffnen zeigte es sich dann, ob die Kompensationsspannung zu hoch oder zu niedrig war. Durch Änderung des Abzweigwiderstandes *J* ließ sich die Kompensationsspannung dann leicht einstellen.

Zur Eichung des Elektrometers wurde bei geschlossenem Schlüssel *S* die Verbindung des Quadrantenpaars 2 mit dem Elektrometergehäuse bei *Z* unterbrochen und dazwischen ein kleiner Teil des Abzweigwiderstandes *J* gelegt. Mit der entstehenden geringen Potentialdifferenz ließ sich dann die Empfindlichkeit des Elektrometers bestimmen. Dieses geschieht dabei

unter genau denselben Bedingungen wie während des Experiments, d. h. während beide Quadrantenpaare die Kompen-sationsspannung besitzen.

§ 7. Wurde nun, wie eben beschrieben, die Kompen-sationsspannung eingestellt, so sollte, falls der Strom durch die Poloniumzelle konstant war, auch das Potential des Quadranten 1 und damit die Stellung der Elektrometernadel

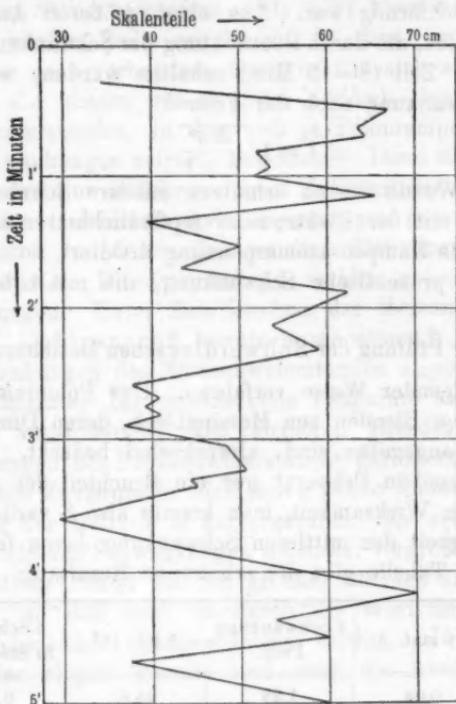


Fig. 2.

konstant bleiben. Da aber die Strahlung des Poloniums Schwankungen zeigte¹⁾, so war die Elektrometernadel in

1) Wir haben auch qualitative Versuche mit einem Präparat von reinem Radiumbromid (ca. 6 mg) angestellt. Dieselben haben ergeben, daß auch das Radium diese Schwankungen der Aktivität zeigt. Das Radiumbromid war bei diesen Versuchen mit einer Glimmerplatte bedeckt, so daß nur die β - und γ -Strahlen zur Wirksamkeit gelangten.

ständiger und zwar unregelmäßiger Bewegung. Zur Aufzeichnung der Schwankungen wurden die Umkehrpunkte der Elektrometeradel mit den dazugehörigen Zeiten abgelesen. Fig. 2 gibt als Beispiel ein auf diese Weise erhaltenes Bild der Schwankungen. Das Bild ist nur ein angenähertes, da die Umkehrpunkte der Elektrometeradel durch gerade Linien verbunden sind, während in Wirklichkeit die Bewegung der Nadel ungleichförmig war. Aus einer größeren Anzahl von Umkehrpunkten, die durch Beobachtung der Schwankungen über eine längere Zeit (8—15 Min.) erhalten wurden, wurde die mittlere Schwankung nach der Formel

$$s = \sqrt{\frac{\sum f^2}{n-1}}$$

berechnet. Wurde die so erhaltene mittlere Schwankung in Skalenteilen mit der Elektrometerempfindlichkeit multipliziert und durch die Kompensationsspannung dividiert, so ergab dies die mittlere prozentische Schwankung, die mit \bar{s} bezeichnet werden soll.

§ 8. Zur Prüfung der Schweidlerschen Beziehung $\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ wurde in folgender Weise verfahren. Das Poloniumpräparat wurde mit den Blenden aus Messingblech, deren Dimensionen oben in § 5 angegeben sind, abwechselnd bedeckt. Dadurch trat von demselben Präparat nur ein Bruchteil der zerfallenen Atome in Wirksamkeit, man konnte also Z variieren und die Abhängigkeit der mittleren Schwankung davon feststellen. Die folgende Tabelle gibt die erhaltenen Resultate:

Blende	i stat.	\bar{s} Schwankung Proz.	$\bar{s} \sqrt{i} \cdot 10^3$	s Schwankung in Strom (stat.)
1	0,04	1,28	25,6	0,0005
2	0,22	0,57	26,7	0,0013
3	0,58	0,88	29,2	0,0028
4	1,14	0,29	30,4	0,0038
5	2,02	0,23	33,1	0,0048
6	3,25	0,20	35,1	0,0065
0	4,25	0,16	33,0	0,0070

Die zweite Reihe gibt die (Sättigungs-) Ströme (in statischen Einheiten), die bei diesen Blenden durch die Poloniumzelle flossen. Dieselben wurden bei Blende 0 galvanometrisch gemessen, bei den übrigen Blenden aus der Kompensations-

spannung und dem Bronsonwiderstande berechnet. Der Strom bei kleinstter Blende entspricht ungefähr 1000, der bei unbedecktem Präparat ungefähr 100000 in der Sekunde zerfallenden Atomen. Die dritte Reihe gibt die mittlere prozentische Schwankung, die für jede Blende aus zwei bis drei Beobachtungsreihen von je 8 Min. erhalten wurde (etwa 200 Umkehrpunkte). Nach der v. Schweidlerschen Theorie soll $\sqrt{\bar{Z}}$, oder, da Z proportional dem Sättigungsstrom i ist, \sqrt{i} konstant sein. Wie aus der vierten Reihe ersichtlich, ist dies ziemlich gut der Fall. Der noch vorhandene Gang erklärt sich aus Versuchfehlern. Zu diesen gehört unter anderen der Einfluß des Bronsonwiderstandes, in dem sich ja Poloniumpräparate, die auch Schwankungen zeigten, befanden.¹⁾ Diese Schwankungen kommen aber nur in sehr geringem Maße mit zur Beobachtung, da der Bronsonwiderstand bei Spannungen gebraucht wurde, die sehr weit von denen, bei welchen Sättigungsstrom fließt, entfernt waren. Dementsprechend verkleinern sich auch die Schwankungen. Unter Zuhilfenahme der Messungen des Hrn. K. W. F. Kohlrausch²⁾ konnte ausgerechnet³⁾ werden, daß die Schwankungen des Bronsonwiderstandes diejenigen des Poloniumpräparates bei unbedecktem Präparat nur um einige Prozente vergrößerten. Bei kleineren Blenden kamen die Schwankungen des Bronsonwiderstandes gar nicht in Betracht. Eine zweite Fehlerquelle wird durch kleine Änderungen in der Spannung der Batterie G hervorgerufen. Es werden dadurch die beobachteten Schwankungen scheinbar vergrößert, und zwar kommt dieser Fehler bei den größten Blenden am meisten in Betracht, so daß auch hierdurch der Wert der Konstanten mit zunehmender Blendenöffnung wächst. In der letzten Spalte der obigen Tabelle sind noch die Absolutwerte der

1) Die hier behandelten Schwankungen der radioaktiven Strahlung sind vielleicht der Grund für die mehrfach ausgesprochenen Klagen über den Bronsonwiderstand (z. B. Ebert, in der Diskussion zu dem Vortrage von E. Ladenburg auf der Naturforscherversammlung 1907 in Dresden; Physik. Zeitschr. 8, p. 775. 1907).

2) K. W. F. Kohlrausch, l. c.

3) Nach Kohlrausch (l. c.) ist die beobachtete Schwankung $e^3 = e_1^2 + e_2^2$, wobei e_1 bzw. e_2 die Schwankungen bedeuten, die von der Poloniumzelle bzw. dem Bronsonwiderstände herrühren. Zu beachten ist auch, daß die Poloniumpräparate in D 12 mal stärker waren als dasjenige in F .

mittleren Schwankungen in Strom, wie sie wirklich auftraten, angegeben. Dieselben sind gleichzeitig mit den prozentischen Schwankungen in den Kurven Fig. 3 (I prozentische Schwankung, II absolute Schwankung) in Abhängigkeit von dem

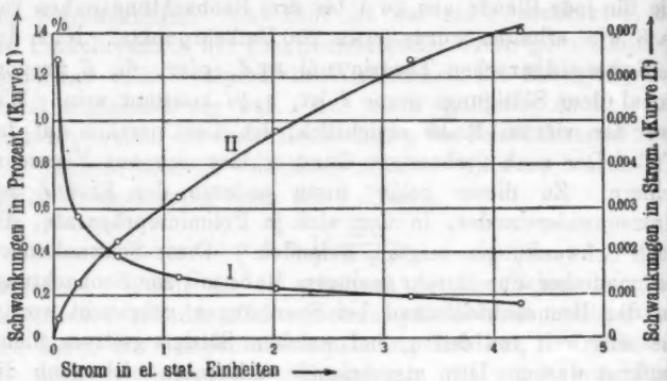


Fig. 3.

Sättigungsstrom i wiedergegeben. Es ist aus diesen Kurven zu erssehen, daß die prozentischen Schwankungen am größten bei kleinster Blende, die absoluten am größten bei unbedecktem Präparat sind. Da also die absoluten Schwankungen bei starken Präparaten am größten sind, so werden sie sich bei diesen, besonders wenn man eine Kompensationsmethode anwendet, am leichtesten beobachten lassen.

§ 9. Die Schwankungen lassen sich vorausberechnen, wenn man in der v. Schweidlerschen Formel $\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ an Stelle von Z den Sättigungsstrom i einführt. Bei dem Zerfall eines jeden Atomes wird ein α -Teilchen ausgesandt¹⁾, das auf seinem Wege in Luft eine gewisse Anzahl Ionen erzeugt. Nach Rutherford²⁾ erzeugt ein α -Teilchen, das von Radium selbst

1) Das RaF sendet bekanntlich auch Elektronen von sehr geringer Geschwindigkeit aus. Die durch diese Elektronen erzeugte Ionisation ist gegenüber der durch die α -Partikel hervorgerufenen vernachlässigt.

2) E. Rutherford, Phil. Mag. (6) 10. p. 207. 1905. Bei dieser Bestimmung ist vorausgesetzt, daß jedes α -Partikel sowie jedes gebildete Ion als Ladung ein Elementarquantum trägt. Die Kenntnis des Elementarquantums ist nicht notwendig.

im Zustande seiner Minimalaktivität fortgeschleudert wird, bei seiner Absorption in Luft 86000 Ionenpaare. Unter Berücksichtigung der etwas größeren Reichweite der Poloniumstrahlen, 3,86 cm gegenüber 3,50 cm für die α -Partikel des Radiums selbst¹⁾, muß man hier etwa 94000 Ionenpaare setzen. Dann ist der durch den Zerfall von Z Atomen in der Sekunde entstehende Strom $i = Z \cdot 94000 \cdot e$, wo e die Ladung eines Ions bedeutet. Ist Z nicht die in der Sekunde zerfallende Anzahl, sondern die in der Zeit δ , so ist

$$i = \frac{Z \cdot 94000 \cdot e}{\delta} \quad \text{oder} \quad Z = \frac{i \cdot \delta}{94000 \cdot e}.$$

Wird dies in die Formel $\bar{s} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\bar{s} = \frac{\sqrt{94000 \cdot 3,4 \cdot 10^{-10}}}{\sqrt{i \cdot \delta}} = \frac{5,66 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{i \cdot \delta}}.$$

Die Zeit δ ist offenbar die Zeit, über die die Elektrometernadel die Schwankungen vermöge ihrer Trägheit integriert. Hat man eine aperiodische Elektrometernadel, so kann für diese Zeit höchstens die Schwingungsdauer der Nadel in Betracht kommen. Betrachtet man nämlich den Ausschlag der Elektrometernadel zu einer gewissen Zeit t_1 , so wird ein Impuls, den die Elektrometernadel zu einer Zeit erhalten hat, die zeitlich weiter zurückliegt als eine ganze Schwingung der Nadel, ohne Einfluß auf den Ausschlag der Nadel zu der Zeit t_1 bleiben. Die Elektrometernadel integriert aber nicht gleichmäßig über die Zeit ihrer Schwingungsdauer, da, wie man leicht sieht, die Impulse, die die Elektrometernadel eine halbe Schwingungsdauer früher empfangen hat, am meisten Einfluß auf den Ausschlag zu der Zeit t_1 haben. Unter Verzicht auf die theoretische Behandlung wurde bei den vorliegenden Beobachtungen für δ zunächst die Schwingungsdauer der Nadel eingesetzt. Man erhält dann für die nach der Formel

$$\bar{s} = \frac{5,66 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{i \cdot \delta}}$$

berechnete Schwankung den unteren Grenzwert, indem δ in dieser Formel zu groß eingesetzt ist.

1) M. Levin, Physik. Zeitschr. 7. p. 521. 1908.

§ 10. Die im § 8 mitgeteilten Beobachtungen sind nun wenig zu einer derartigen Berechnung geeignet, indem das dort benutzte Elektrometer nicht aperiodisch war, sondern erst nach etwa vier bis fünf Schwingungen zur Ruhe kam. Für ein solches kann man auch nicht die Schwingungsdauer der Nadel als Grenzwert für die Zeit, über die das Elektrometer die Schwankungen integriert, einsetzen. Es sei nur erwähnt, daß die dort beobachteten Werte etwa drei- bis viermal größer waren als die berechneten, bei denen für δ die ganze Schwingungsdauer der Nadel eingesetzt wurde.

Es wurden deshalb Versuche mit einem Dolezalekelektrometer gemacht, das durch Benutzung einer sehr leichten Nadel und durch Luftdämpfung mit Glimmerblättchen aperiodisch gemacht worden war. Die erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Blende	i (stat. Einh.)	\bar{s} in Proz.	$\bar{s} = \frac{5,66 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{i \cdot \delta}}$	$\bar{s} \sqrt{i} \cdot 10^3$
3	0,45 ¹⁾	0,144	0,108	97
4	0,84	0,113	0,075	104
5	1,37	0,087	0,059	102
6	2,02	0,076	0,049	108

Die in Spalte 5 angegebenen Werte von $\bar{s} \sqrt{i}$ zeigen wieder gute Konstanz. Wie aus Spalte 3 und 4 ersichtlich, sind die beobachteten Werte nur verhältnismäßig wenig größer als die berechneten, bei denen für δ die ganze Schwingungsdauer der Nadel (67") eingesetzt wurde. Da in Wirklichkeit für δ ein Bruchteil dieser Zeit einzusetzen ist, so werden dann wahrscheinlich die berechneten Werte größer ausfallen

1) Die Sättigungsströme bei den einzelnen Blenden sind in der obigen Tabelle alle kleiner, als die entsprechenden in § 8 angegebenen Sättigungsströme. Das ist die Folge der zeitlichen Abklingung der Aktivität des untersuchten RaF-Präparates. Dieselbe verlief sehr angenähert nach der bekannten Gleichung $J_t = J_0 e^{-5,6 \cdot 10^{-8} \cdot t}$. Als Beispiel sei eine nicht ausgewählt gute Messung herausgegriffen. Am 6./8. 1907 wurde der Sättigungsstrom des unbedeckten Präparates zu $14,18 \cdot 10^{-10}$ Amp., am 15./10. 1907 zu $9,78 \cdot 10^{-10}$ Amp. bestimmt. Die Rechnung nach obiger Formel liefert für den 15./10. 1907 den Wert $10,11 \cdot 10^{-10}$ Amp.

wie die beobachteten. Aber auch dies würde noch in Einklang mit den beobachteten Werten stehen, denn, wie im nächsten Paragraphen gezeigt werden wird, sind die beobachteten Werte wegen der Kapazität des Elektrometers um ungefähr 50 Proz. zu klein gefunden worden.

§ 11. Um den Einfluß der Kapazität auf die Schwankungen zu untersuchen, wurden die Schwankungen mit einem Goldblattelektrometer nach Hankel beobachtet, das eine sehr kleine Kapazität besitzt. Die Kapazität desselben wurde dann dadurch vergrößert, daß zu dem Hankelelektrometer noch die Kapazität des Dolezalekelektrometers hinzugeschaltet wurde, das schätzungsweise eine sechs- bis zehnfach so große Kapazität besaß. Es ergab sich, daß, wenn die Schwankungen an dem Hankelelektrometer allein beobachtet wurden, sie fast doppelt so groß ausfielen, als wenn mit dem Hankelelektrometer noch die Kapazität des Dolezalekelektrometers verbunden war. Es wurde z. B. in einem Versuche die prozentige Schwankung mit dem Hankelelektrometer zu 0,17 Proz. beobachtet; wurde zu dem Hankelelektrometer noch das Dolezalekelektrometer hinzugeschaltet, so ergab sich die prozentige Schwankung zu 0,089 Proz. Die im vorigen Paragraphen erwähnten Beobachtungen mit dem aperiodischen Dolezalekelektrometer sind infolge dieses Resultates auch um 50 Proz. zu vergrößern, um noch mehr, wenn auf die Kapazität 0 extrapoliert werden würde. Dieser Einfluß der Kapazität auf die Größe der beobachteten Schwankungen ist zusammengesetzter Natur. Es kann erstens die Aufladezeit des Elektrometers gegenüber der Zeit zwischen zwei Schwankungsimpulsen in Betracht kommen. Die beobachteten Schwankungen werden dann zu klein ausfallen. Ferner ist eine gewisse Elektrizitätsmenge zum Laden und Entladen der Elektromerkapazität nötig, die dem durch den Bronsonwiderstand fließenden, einer Schwankung entsprechenden Strome verloren geht. (Auch die Schnelligkeit des Ausgleiches der Spannungen durch den Bronsonwiderstand kann in Betracht kommen.) Welcher von diesen Faktoren den von uns beobachteten Einfluß der Kapazität vorwiegend bewirkt hat, läßt sich nicht entscheiden.

§ 12. Fassen wir die erhaltenen Resultate zusammen, so hat sich ergeben:

1. Die v. Schweidlersche Beziehung $\bar{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ konnte durch

Variieren von Z im Verhältnisse 1:100 bestätigt werden.

2. Verkleinerung der Kapazität des angewandten Elektrometers vergrößert bei der benutzten Versuchsanordnung die mit demselben beobachteten Schwankungen.

3. Berechnet man die zu erwartenden Schwankungen aus dem Sättigungsstrom, so stimmen die beobachteten Werte insfern mit den berechneten überein, als die beobachteten größer ausfallen als der kleinste nach der Theorie mögliche, nämlich der, bei dem für die Zeit, über die das Elektrometer die Schwankungen integriert, die Schwingungsdauer des (aperiodischen) Elektrometers eingesetzt wird.

§ 18. Nimmt man die von Hrn. v. Schweidler aufgestellte Beziehung $\bar{\epsilon} = \frac{1}{\sqrt{Z}}$ durch die vorliegenden Versuche für bestätigt an, so ergibt sich daraus eine einfache Methode zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums.¹⁾ Wurde an Stelle von Z der Sättigungsstrom i eingeführt, so ergab sich (§ 9)

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sqrt{e \cdot 94\,000}}{\sqrt{i} \delta}.$$

Diese Gleichung ergibt für das Elementarquantum e die Beziehung $e = \frac{\bar{\epsilon}^2 i \delta}{94\,000}$. Die beschriebenen Versuche reichen nun noch nicht aus, um daraus einen exakten Wert für e ausrechnen zu können. Einerseits hat die Zeit δ , über die das Elektrometer die Schwankungen integriert, noch nicht genau bestimmt werden können, andererseits sind die Schwankungen wegen der Kapazität der benutzten Elektrometer zu klein ausgefallen. Um aber zu sehen, ob schon jetzt für e wenigstens die richtige Größenordnung herauskommt, wurde aus den Versuchen mit dem Hankelektrometer e das Elementarquantum ausgerechnet. δ wurde dabei = 1 Sek. gesetzt. Es ergab sich $e = 1,3 \cdot 10^{-10}$ stat. Einh. Das ist in der Tat ein Wert, der in der Größenordnung sehr gut mit den von anderen Beob-

1) Es wird hier vorausgesetzt, daß das Ionisierungsvermögen der α -Teilchen konstant ist.

achtern gefundenen stimmt. Richarz fand aus der Elektrolyse $1,29 \cdot 10^{-10}$, Thomson $3,4 \cdot 10^{-10}$, Planck aus der Strahlungstheorie $4,69 \cdot 10^{-10}$. Wenn auch auf den oben mitgeteilten Zahlenwert kein Gewicht zu legen ist, so scheint die Übereinstimmung doch zu zeigen, daß die Methode zur Bestimmung des Elementarquantums brauchbar ist.

Diese von uns angegebene Methode hat mit der Thomsonschen Methode den Vorzug, daß bei ihr die Loschmidttsche Zahl nicht verwandt wird. Gegenüber der Thomsonschen Bestimmungsweise aber zeichnet sie sich dadurch aus, daß sie erstens einfacher ist, und zweitens die Versuche in einem vollkommen trockenen Gase angestellt werden.

§ 14. Es sei uns noch folgende Bemerkung gestattet. Ebenso wie man aus den Schweidlerschen Schwankungen¹⁾ das elektrische Elementarquantum erhalten kann (§ 13), kann man natürlich auch die Konstante berechnen, die angibt, wieviel Ionenpaare von einem α -Teilchen während seiner ganzen Flugbahn in einem Gase erzeugt werden (vgl. § 9). Selbstverständlich muß man dann das elektrische Elementarquantum als bekannt voraussetzen.

Nun ergibt sich aber jene Konstante auch noch durch folgende Überlegung. Bringt man z. B. eine Platte, bezogen mit RaF, in ein sehr gutes Vakuum und mißt den Strom, den die α -Teilchen befördern, so ist dieser

$$i_0 = Ne,$$

worin N die Anzahl der pro Sekunde ausgesandten α -Teilchen bedeutet, e das Elementarquantum. Mißt man jetzt den Sättigungsstrom der Ra F-Platte, wenn dieselbe sich in Luft befindet, so ist derselbe $i_t = Ne \cdot C$, wobei C die zu bestimmende Konstante ist. Dabei ist die Ladung Ne der α -Teile selbst gegenüber NeC vernachlässigt. Durch Division beider Gleichungen erhält man²⁾:

$$C = \frac{i_t}{i_0}.$$

Setzt man diesen Wert nun in die Schweidlersche Beziehung ein, so ergibt sich, falls sie erfüllt ist, daß die Glei-

1) Diese Bezeichnung möchten wir für diese ganz charakteristischen Schwankungen radioaktiver Umwandlung vorschlagen.

2) E. Rutherford, l. c.

chung $i_0 = Ne$ zu Recht besteht. Das würde aber besagen, daß jedes α -Teilchen nur die Ladung eines Elementarquantums trägt. Auf diese Weise kann man die Anzahl der Hypothesen über das α -Teilchen, ob es besteht aus einem Wasserstoffmolekül in Verbindung mit einem elektrischen Elementarquantum, oder aus einem zwei Elementarquanta mit sich führenden Heliumatom, oder endlich aus einem halben Heliumatom verbunden mit einem Elementarquantum, einschränken oder sogar bestimmt zwischen ihnen entscheiden. Letzteres wäre dann der Fall, wenn sich aus derartigen Versuchen die Gleichung

$$i_0 = N \cdot 2e$$

ergeben würde.

Leider reichen unsere Versuche bis jetzt nicht dazu aus, hier zu entscheiden.

Die Versuche mußten durch den Weggang des einen von uns¹⁾ abgebrochen werden. Sie sollen von dem anderen speziell auch zur genaueren Bestimmung des Elementarquantums fortgesetzt werden.

Berlin, Physik. Institut d. Universität.

1) Edgar Meyer.

(Eingegangen 10. Februar 1908.)

**8. Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs
und eine Klassifizierung des Verhaltens elektro-
lytischer Anoden;
von Günther Schulze.**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs wurde von W. v. Bolton¹⁾ festgestellt, der zuerst reines Niob darstellte, nachdem längere Zeit die Wasserstoffverbindung für das Metall gegolten hatte. Er fand, „daß bei 120 Volt Wechselstrom durch einen Elektrolyten ($\frac{1}{10}$ H₂SO₄) nicht hindurchgeht, wenn beide Elektroden aus Niobblech bestehen. Ist die eine Nb, die andere Pt, so geht nur die eine Phase des Wechselstromes hindurch, ähnlich wie bei Tantal, und zwar von Pt nach Nb, das heißt, wenn Niob negativ ist“.

Muthmann und Fraunberger²⁾ fanden, „daß die seltenen Metalle V und Nb die Eigenschaft der Passivierbarkeit zeigen“. Als Maß für den Grad der Passivierbarkeit diente die elektromotorische Kraft, welche eine Kombination der betreffenden Elemente mit der Normalquecksilberelektrode zeigte. Doch konnte nach W. v. Bolton das Material, das sie benutzten, kein reines Niob sein.

In den Versuchen, über die hier berichtet werden soll, stellte W. v. Bolton von der Firma Siemens & Halske in liebenswürdigster Weise seinen Vorrat an Niob zur Verfügung. Derselbe bestand aus einigen dünnen Blechen unregelmäßiger Umrandung von 1—3 qcm Oberfläche, einem ziemlich regelmäßigen Würfel von 0,13 ccm Inhalt und einigen ca. 0,1 ccm großen Bruchstücken eines kugelförmigen Regulus, die an einer Seite durch eine glatte, kugelförmig gekrümmte Oberfläche begrenzt werden.

1) W. v. Bolton, Zeitschr. f. Elektrochem. 13. p. 145. 1907.

2) W. Muthmann u. F. Fraunberger, Sitzungsber. der Kgl. Akad. der Wissenschaften zu München 34. II. 1904.

Der Gang der Untersuchung, die Schaltung, die benutzten Apparate waren dieselben wie bei der Untersuchung des Tantals.¹⁾

Infolge der Kleinheit der einzelnen Stücke bot die Abdichtung der stromzuführenden Drähte die größten Schwierigkeiten, deren Überwindung nicht in befriedigender Weise gelang. Bei allen Dichtungsmitteln, die probiert wurden (Chatterton-Kompond, Mennigekitt, Siegellack, Bleiglätte-Glyzerinkitt), bahnte sich der Strom zwischen Niob und Dichtungsmaterial einen Weg, bis er zu dem stromzuführenden Drahte gelangte. Bei Spannungen unter 100 Volt wurde die Zelle erst nach Tagen undicht, bei höheren Spannungen dagegen in ziemlich kurzer Zeit.

Orientierende Versuche über die Formierungsgeschwindigkeit ergaben dieselbe Größenordnung wie beim Tantal.

Um zu untersuchen, in welchen Elektrolyten Niob Ventilwirkung zeigt, wurden die Niobbleche von oben her ein wenig in den Elektrolyten eingetaucht. Da der Elektrolyt allmählich am Niobblech in die Höhe kroch, auch Funken vom Elektrolyten zum nicht formierten Teile des Bleches übersprangen, ließ sich in verdünnten Lösungen die Maximalspannung nicht annähernd erreichen. Aus der im folgenden mitgeteilten Tabelle läßt sich nur ersehen, wo Ventilwirkung vorhanden ist, und oberhalb welches Betrages sie liegt.

Die Lösungen wurden in mittlerer Verdünnung angewandt:

Tabelle I.

Elektrolyt	Ausgehaltene Spannung	Elektrolyt	Ausgehaltene Spannung
NaOH	300 Volt	KCN	300 Volt
NH ₄ OH	300 "	K ₄ Fe(CN) ₆	150 "
HCl.	300 "	K ₄ CO ₃	310 "
H ₂ SO ₄	210 "	Essigsäure	300 "
HNO ₃	170 "	(NH ₄) ₂ HPO ₄	300 "
H ₃ AsO ₄	250 "	NaBr	200 "
KHC ₂ O ₄	210 "	KJ	200 "
KMnO ₄	170 "	HF	250 "

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. 23. p. 226. 1907.

Die Tabelle zeigt, daß ebenso wie bei Tantal in allen untersuchten Elektrolyten Ventilwirkung bis zu beträchtlichen Spannungen vorhanden ist.

Um den Einfluß der Konzentration auf die Maximalspannung zu ermitteln, wurde versucht, die Maximalspannung beim Eintauchen von oben her trotz der angegebenen Störungen zu erzwingen. Das charakteristische äußerliche Kennzeichen der Maximalspannung ist das Überspringen zahlreicher feiner Fünkchen innerhalb der Flüssigkeit vom Elektrolyten zum Metall. Wenn nun das Niobblech zuerst fast ganz eingetaucht und möglichst weit formiert, dann ein wenig gehoben wurde, so daß die Flüssigkeitsoberfläche von schon formierten Teilen durchsetzt wurde, so ließ sich bei verhältnismäßig hoher Stromdichte (0,05 Amp./qcm) und nicht zu geringen Konzentrationen das Funkenspiel erzwingen und gleichzeitig beobachten, daß dann tatsächlich die Spannung von der Stromdichte nahezu unabhängig wurde. Diese Spannung wurde als Maximalspannung angesehen. Da sie aber wegen der dabei auftretenden starken Erhitzung des Bleches und wegen anderer Störungen nicht ohne weiteres mit den gelegentlich der Tantaluntersuchung angegebenen Werten vergleichbar war, wurden mit zwar wesentlich größerem, aber fast ebenso dünnem Tantalblech, das die Firma Siemens & Halske zur Untersuchung seiner Brauchbarkeit zum Gleichrichten von Wechselstrom zur Verfügung gestellt hatte, ganz dieselben Versuche ausgeführt. So wurden für Niob und Tantal folgende Werte erhalten:

Tabelle II.

Einfluß der Konzentration des Elektrolyten auf die Maximalspannung.

Elektrolyt:	NaOH		HCl		$(\text{NH}_4)_2\text{HPO}_4$	
	Nb	Ta	Nb	Ta	Nb	Ta
Maximalspannung	10 Proz.	Volt	Volt	Volt	Volt	Volt
	1 „	76	120	170	200	210
	0,1 „	190	320	220	280	360
bei	10 Proz.	Volt	Volt	Volt	Volt	Volt
	1 „	470	490	350	410	530
	0,1 „	470	490	350	410	525

Die Tabelle zeigt, daß sich Niob dem Tantal sehr ähnlich verhält. Bei Niob scheint die Maximalspannung im allgemeinen

ein wenig niedriger zu sein und mit zunehmender Konzentration noch schneller zu sinken als bei Tantal.

Aus den Versuchen läßt sich mutmaßen, daß Niob bei einwandfreier Einführung nicht zu kleiner Elektroden und großer Verdünnung des Elektrolyten fast ebenso hohe Spannungen abdrosseln kann, wie Tantal, also z. B. über 900 Volt in 0,02 Proz. K_2CO_3 .

Bei den Versuchen der Tab. II ließ sich die Flüssigkeit zum Sieden erhitzen, ohne daß die Maximalspannung wesentlich sank. Der Einfluß der Temperatur auf die Ventilwirkung ist also ebenso gering wie beim Tantal.

Zur Bestimmung der Kurve der Sperrfähigkeit¹⁾ ($e = f(\delta/\epsilon)$, $\delta/\epsilon = f/4\pi C$, δ Dicke, f Fläche, C Kapazität, ϵ Dielektrizitätskonstante der dielektrischen Gasschicht) wurden der Würfel und das größte der Bruchstücke des Regulus benutzt. Sie wurden stumpf gegen einen oben amalgamierten Kupferstab gepreßt und dann, soweit sie abgedichtet werden sollten, zunächst mit einer dünnen Schicht Chatterton-Kompound überzogen. Darüber wurde ein Kitt aus Glyzerin und Bleiglätte gestrichen, der in kurzer Zeit erhärtete und das Niob gut am Kupferstabe festhielt. Nachdem dieser Kitt völlig getrocknet war, wurde er zur Verbesserung der Isolation gegen den Elektrolyten mit Siegellack getränkt. Diese Art der Abdichtung bewährte sich am besten, war aber auch nur bis höchstens 200 Volt brauchbar. Deshalb wurden die Versuche nur bis 100 Volt ausgedehnt. Da die Bestimmung der freien Oberfläche der kleinen Niobstücke schwierig war, die Versuche eine große Empfindlichkeit der Ventilwirkung gegen Stromunterbrechungen ergaben und die oben angegebenen Störungen noch hinzukamen, kann die unten angegebene Kurve der Sperrfähigkeit auf große Genauigkeit keinen Anspruch machen.

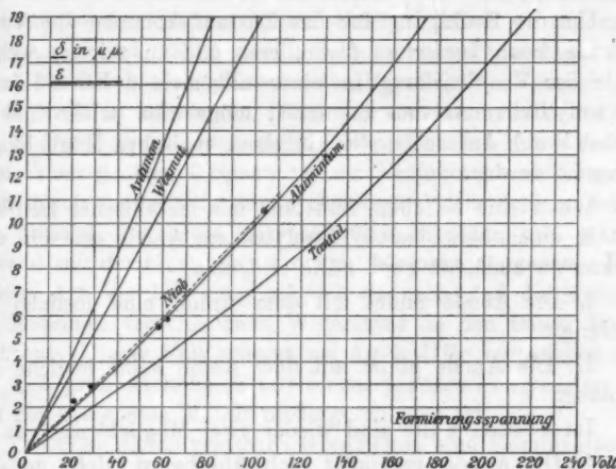
Die Messungen wurden mit 0,1 Proz. K_2CO_3 ausgeführt und zwar bei Zimmertemperatur, da bei derselben die Dichtung besser standhielt als bei 0° C. Trotzdem sind die Werte mit dem für andere Metalle bei 0° C. erhaltenen vergleichbar, da alle bisherigen Messungen ergaben, daß der Einfluß der

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. 24. p. 48. 1907.

Temperatur auf die Kapazität, wenn überhaupt vorhanden, jedenfalls sehr gering ist.

Durch Vorversuche wurde festgestellt, daß die Gashaut ungefähr $1\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Anlegen der Spannung ihre endgültige Dicke erreicht. Die endgültigen Messungen wurden 2–3 Stunden nach Anlegen der Spannung ausgeführt.

Die nachstehende Figur zeigt, daß die Kurve der Sperrfähigkeit des Niobs der des Aluminiums sehr nahe und wesentlich höher liegt als die des Tantals. Außer Niob und Tantal zeigen die in derselben fünften Gruppe des periodischen Systems



Kurve der Sperrfähigkeit des Niobs. Zum Vergleich: Bi, Sb, Ta, Al.

der Elemente befindlichen Metalle Wismut und Antimon Ventilwirkung. Bei ihnen liegt ebenfalls die Kurve der Sperrfähigkeit bei dem Metalle mit höheren Atomgewichten tiefer. Da Niob und Tantal einer anderen Untergruppe angehören als Antimon und Wismut, läßt sich eine gleichmäßige Beeinflussung der Sperrfähigkeitskurven aller vier Elemente durch das Atomgewicht nicht erwarten.

Da ferner nach dem Verhalten von Niob und Tantal einerseits und von Antimon und Wismut andererseits chemisch ähnliche Stoffe ähnliche Ventilwirkung zeigen, so läßt sich die Vermutung aussprechen, daß die dem Aluminium chemisch

sehr nahestehenden Elementen Scandium, Yttrium, Lanthan, Ytterbium auch Ventilwirkung zeigen werden, und daß ihre Ventilwirkung der des Aluminiums ähnlich ist.

So ist also die elektrolytische Ventilwirkung bisher bei elf Elementen nachgewiesen oder wenigstens wahrscheinlich gemacht. Als Bedingung für ihr Zustandekommen war in der Arbeit über Wismut, Antimon und Magnesium¹⁾ angegeben, daß „das Metall als Anode im Elektrolyten schwer löslich sei und mit ihm eine schwer lösliche nichtleitende Verbindung bilden könne“.

Um die Bedingung für das Zustandekommen der Ventilwirkung noch besser zu formulieren und zu zeigen, welcher Platz der Ventilwirkung in einer allgemeinen Klassifizierung elektrolytischer Anoden zukommt, möge eine solche hier zunächst durch Aufsuchen der einzelnen typischen Möglichkeiten versucht werden.

Wenn eine beliebige Substanz mit metallischer Leitfähigkeit in einem beliebigen Elektrolyten zur Anode gemacht wird, so können zunächst zwei Fälle eintreten:

I. Die Anode bildet mit dem Anion eine lösliche Verbindung.

II. Die Anode bildet mit dem Anion keine lösliche Verbindung.

Im zweiten Falle sind wieder zwei Möglichkeiten da:

1. Die Anode verbindet sich überhaupt nicht mit dem Anion (oder einem Teile desselben). Dann findet im allgemeinen Sauerstoffentwickelung an ihr statt. Beispiel: Pt, C.

2. Die Anode bildet mit dem Anion (oder einem Teile desselben) eine unlösliche Verbindung. Diese Verbindung wird die Oberfläche der Anode zunächst als Haut überziehen. Dabei läßt sich weiter unterscheiden:

a) Die Haut ist körnig, rissig, grobporös oder schwammig und haftet nur lose auf der Anode.

a) Sie leitet. Dann kann sie das Metall vor der Einwirkung des Anions um so besser schützen, je zusammenhängender und je dicker sie ist. Beispiel: Pb in H_2SO_4 .

1) I. c.

β) Sie leitet nicht. Dann kann sie das Metall vor der weiteren Einwirkung des Anions nicht schützen. Der Strom wird sie dauernd verstärken, bis sie beginnt, abzublättern und zu Boden zu sinken. Beispiel: Pb in K_2CrO_4 .

Im Fall α) wird an der Anode meist ein geringer, im Falle β) ein mäßiger Spannungsverlust eintreten.

b) Die Haut bildet eine zusammenhängende, fest auf der Anode haftende Schicht.

a) Die Schicht leitet. Dann schützt sie das Metall vor dem weiteren Angriff durch das Anion. Sie selbst kann nicht wachsen (wenn nicht das Anion sekundär durch sie hindurchdiffundiert), und bleibt auf molekularer Dicke stehen. Das Metall erscheint edel. Sogenannte „Passivität“. Beispiel: Fe, Ni, Cr u. a. in wässrigen Lösungen von Sauerstoffsalzen.

β) Die Schicht leitet nicht. Dann werden die Anionen, wenn ihnen genügend Spannung zur Verfügung steht, mechanisch durch die Schicht hindurchdringen. Die Schicht erhält eine äußerst feinporöse (röhrenförmige) Struktur und wächst dauernd mit der hindurchgeschickten Elektrizitätsmenge. Hier ist eine Art Ventilwirkung möglich dadurch, daß die Anionen und Kationen verschiedenen Widerstand in den feinen Poren erfahren. Dieser Fall scheint bei Ag in HBr vorzuliegen und läßt sich grob nachahmen mit einem porösen Tonzyylinder, auf dem ein geeignetes Metall niedergeschlagen ist.

Zwischen diesen typischen Grenzfällen sind Kombinationen möglich. Zum Beispiel kann zwischen dem Grenzfalle, daß sich an der Anode nur Gas entwickelt, weil sie sich überhaupt nicht mit dem Anion verbindet und dem Grenzfalle, daß alle zur Anode gelangenden Anionen mit ihr eine nichtleitende poröse Haut bilden, so daß sich überhaupt kein Gas entwickelt, die Kombination eintreten, daß sowohl Gasentwicklung als Hautbildung stattfindet. Dies ist das Gebiet der echten Ventilwirkung. Das Gas bildet in den Poren der festen Haut eine äußerst dünne Schicht, welche die eigentümlichen Erscheinungen der echten Ventilwirkung verursacht. Wenn für eine bestimmte Kombination von Metall und Elektrolyt zwischen der gebildeten Hautmenge und Gasmenge ein festes gesetzmäßiges Verhältnis besteht, so müssen sich Beziehungen finden lassen zwischen diesem meßbaren Verhältnisse und der

Formierungsgeschwindigkeit, Empfindlichkeit gegen Stromunterbrechungen, Maximalspannung und anderen Erscheinungen der betreffenden Kombinationen.

Zusammenfassung.

1. Die elektrolytische Ventilwirkung des Niobs ist der des Tantals sehr ähnlich.
2. Es ist wahrscheinlich, daß auch Scandium, Lanthan, Yttrium, Ytterbium Ventilwirkung zeigen.
3. Es wurde ein Schema für das Verhalten elektrolytischer Anoden aufgestellt, und die Stellung der elektrolytischen Ventilwirkung in demselben, sowie die Bedingungen für das Zustandekommen der Ventilwirkung angegeben.

(Eingegangen 8. Februar 1908.)

**9. Ein neues Universalvariometer
für Lokalvariationen, Intensitäts- und
Deklinationsschwankungen;
von Erich Mayer.**

(Tübinger Inaugural-Dissertation 1907.)

Grundprinzip.

Die Methode des hier beschriebenen Variometers besteht darin, die Änderungen der Horizontalintensität zu messen durch die Verschiebungen eines Kompensierungsmagneten gegen ein feststehendes Magnetometer, an dessen Ort die Feldänderungen kompensiert werden.

Beschreibung des Apparates.

Auf einem Dreifuß mit Stellschrauben sitzt mikrometrisch drehbar die Grundplatte (*P*), auf welcher der Apparat aufgebaut ist. Er besteht wesentlich aus 5 Teilen:

1. *Dem Fernrohr (F)*, das mit einem Bügel an der Platte befestigt ist. Es ist in Höhe und Richtung verstellbar und besitzt ein Gaußsches Okular und einen Doppelfaden.

2. *Dem Schlitten (S)*. Dieser befindet sich in der Mitte der Platte und ist mit einer Schraube von der Ganghöhe 0,25 mm horizontal verschiebbar. An der Schraube ist eine Trommel (*T*) angebracht, die in 250 Teile geteilt ist und so die direkte Ablesung einer Verschiebung von 0,001 mm gestattet. Die Zahl der ganzen Umdrehungen der Trommel wird an einer seitlichen Skale abgelesen.

Auf den Schlitten ist eine um eine vertikale Achse mikrometrisch drehbare Scheibe aufgesetzt, die das Lager des Kompensierungsmagneten trägt. Außerdem erwies es sich als notwendig, das Lager mit einer Schraube zu seitlicher Verschiebung des Magneten in Richtung seiner Längsachse zu versehen. Der Magnet liegt in zwei Stützen und wird in der Mitte durch eine Feder von oben festgedrückt.

3. *Dem Magnetometer (M)*. Dem Fernrohr gegenüber angebracht, steht auf einer Kreisplatte das rechteckige Kupfer-

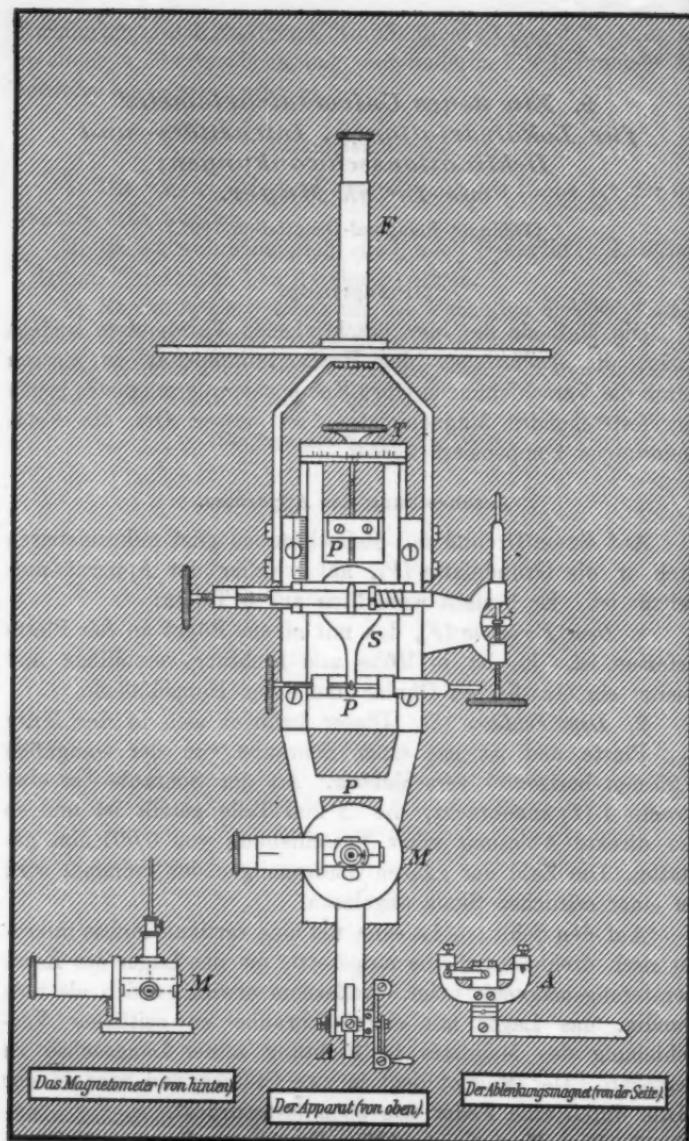


Fig. 1.

gehäuse. Durch eine Bohrung führt vom Torsionskopf ein Quarzfaden, an dem ein Spiegelchen von 5 mm Durchmesser hängt. An der Rückseite des Spiegels ist ein noch kleineres Magnetchen (2 mm) mit Klebwachs angeheftet. Zur Einsetzung des Spiegels ist das Gehäuse in vertikaler Ebene durchschnitten und zerlegbar. In der Richtung zum Fernrohr hat das Gehäuse eine Bohrung, die auf 0,2 mm dem Spiegel angepaßt ist. Zur Verstärkung der Dämpfung ist in diese Bohrung von hinten ein rechtwinklig zugespitzter Kupferbolzen eingeführt, der dem Spiegel sehr nahe gebracht werden kann, ohne seine Ablenkung zu stören. Senkrecht zu dieser geht in derselben Höhe eine zweite horizontale Bohrung, die an beiden Enden mit Silberspiegeln verschlossen ist. Eine dritte horizontale Bohrung ist unmittelbar über dieser und parallel zu ihr durchgeführt und trägt an der einen Seite ein Mikroskop mit Fadenkreuz zur Beobachtung der Stellung des Quarzfadens. Die freien Öffnungen des Gehäuses sind durch Deckgläser verschlossen.

4. *Dem Ablenkungsmagnet (A).* Vom Fuß des Magnetometers auf der Platte (*P*) und um diesen drehbar führt horizontal nach hinten ein Arm, der den Ablenkungsmagnet trägt. Der letztere ist um eine horizontale Achse senkrecht zu diesem Arm drehbar und ist mit einem federnden Hebel versehen, der bei vertikaler Stellung durch einen Dorn in einer Vertiefung festsitzt und horizontal nach beiden Seiten gegen Anschlagschrauben gelegt werden kann.

5. *Dem Deklinationsspiegel.* Zwischen den Füßen des Apparates, am unteren Ende der Drehachse, ist ein Spiegel befestigt, durch den aus einiger Entfernung mit einem Skalenfernrohr die Drehungen des Apparates beobachtet werden.

Die Maße des Apparates zeigt die Abbildung in $\frac{1}{4}$ nat. Größe. (Vgl. Fig. 1.)

Das Material des ganzen Apparates ist Messing mit Ausnahme des Dämpfungsgehäuses, das aus elektrolytischem Kupfer gearbeitet ist, und der Mikrometerschrauben, zu denen Neusilber verwendet wurde.

Der Apparat wurde hergestellt in der Werkstätte des physikalischen Institutes zu Tübingen.

Der Magnet wurde ein Jahr vor Ausführung der Messungen

angefertigt, bis zur Sättigung magnetisiert und künstlich gealtert. Mehrmalige Bestimmungen seines Momentes ergaben eine gute Konstanz.

Justierung.

Zunächst werden Kompensierungs- und Ablenkungsmagnet entfernt, dann geschieht die Aufstellung in folgender Weise:

1. *Senkrechtstellen der Achse durch die Stellschrauben.* Dies wird erreicht mit Hilfe des Mikroskops und des Quarzfadens. Die Achse steht senkrecht, wenn der Faden bei jeder Drehung des Apparates mit dem Fadenkreuz in Deckung bleibt. Es ist erforderlich, daß die Ebene durch die Achse des Mikroskops und den Aufhängepunkt des Fadens parallel der Drehachse des Apparates ist.

2. *Einstellen des Fernrohres auf den Spiegel des Magnetometers.*

3. *Einstellen des Spiegels in den Meridian.* Der Apparat wird so weit gedreht, bis der Doppelfaden mit seinem Spiegelbild so zur Deckung kommt, daß man vier parallele Faden mit gleichen Zwischenräumen erhält (vgl. Fig. 2).

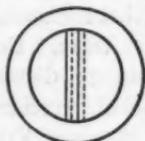


Fig. 2.

4. *Einsetzen des Ablenkungsmagneten* in den in die Fernrohrachse gerichteten Arm. Der Magnet wird zunächst zu seinem Hebel so orientiert, daß er bei vertikaler Stellung des Hebels keine Wirkung auf das Magnetometer ausübt. Dann wird er nach beiden Seiten bis zu maximalen Ausschlägen umgelegt und die Anschläge festgelegt.

5. *Beseitigung der Torsion des Fadens.* Diese geschieht durch Vergleichung der Ablenkungen nach beiden Seiten:

entweder mit gewöhnlichem Okular und Skale am Fernrohr. In diesem Falle kann an Stelle der Ablenkung durch den Magnet eine solche durch die Torsion des Fadens treten, indem man den Spiegel um ein- oder mehrmals 360° nach beiden Seiten umlegt

oder wenn, was auch sonst von Vorteil ist, das Lager des Ablenkungsmagneten auf seinem Arm verschoben werden kann, mit Hilfe einer Ablenkung um 45° unter Benützung des Gaußschen Okulars und der seitlichen Spiegel.

6. *Einlegen des Kompensierungsmagnetes* so, daß der Spiegel in seiner Einstellung bleibt.

7. *Justierung dieses Magneten.* Es muß erreicht werden, daß das Magnetometer sich in der Äquatorialebene des Magneten befindet. Der Schlitten wird um einige Millimeter verschoben und der dadurch hervorgerufene Ausschlag zur Hälfte durch Drehung und zur Hälfte durch seitliche Verschiebung des Magneten beseitigt. Dieser Vorgang wird wiederholt bis die Verschiebung keinen Ausschlag mehr hervorbringt.

Diese Justierung muß eine sehr exakte sein, so daß die seitliche Verschiebung des Magneten von freier Hand sich als zu schwierig erwies. Ebenso ergaben sich Fehler aus einer Anordnung, bei welcher der Magnet nach der Justierung durch Anziehen von Schrauben in ringförmigen Lagern festgehalten werden sollte. Außerdem ist zu beachten, daß während der Dauer dieser Korrekturen die Deklination sich fortgesetzt ändert; es muß deshalb die Beseitigung des Fehlers schließlich auch noch durch Drehung des Apparates versucht werden. Dies geschieht in der Weise, daß der Magnet manchmal möglichst weit vom Magnetometer weggerückt wird; dann kommt die wahre Richtung des magnetischen Meridians am stärksten zur Geltung, der Fehler ist also am geringsten. Die Justierung kann leicht so ausgeführt werden, daß auch bei größeren Verschiebungen sich kein Fehler bemerkbar macht.

8. *Nachprüfung der Torsion.* Diese ist insofern angebracht, als durch die Annäherung des Magneten die Empfindlichkeit des Magnetometers wesentlich größer wird.

9. *Nachprüfung der Justierung des Ablenkungsmagneten* aus dem eben erwähnten Grunde.

Bestimmung des Skalenwertes.

Hilfskonstruktion. Zu diesem Zweck sind zwei Hilfsfelder nötig, eines senkrecht zum Meridian und eines in dessen Richtung, welches das Erdfeld beliebig zu variieren gestattet. Es werden auf der Grundplatte vier vertikale Stromspulen befestigt, von denen je zwei auf den anderen beiden senkrecht stehen. Die Spulen werden mit paarweise gleichen Abständen um das Magnetometer festgesetzt, die gleichgerichteten Spulen mit-

einander verbunden und beide Paare mit Kommutatoren versehen. Das Paar in Richtung des Meridians wird justiert durch Vergleichung der Ausschläge, die ein konstanter Strom nach beiden Seiten hervorbringt. Bei dem Paar, das senkrecht zum Meridian steht, darf ein hindurchgeschickter Strom keine Wirkung auf das Magnetometer ausüben.

Die Wirkung eines Spulenpaars wird berechnet als:

$$H' = \frac{2 \pi r^2 n}{(x^2 + r^2)^{3/2}} \cdot J$$

wo:

r den Spulenhalbmesser,

n die Anzahl der Windungen beider Spulen,

x den Abstand der Spulenmitte vom Magnetometer,

J die Stromstärke in absoluten Einheiten

bedeutet. Es ergab sich damit:

1. Hilfsfeld

(senkrecht zum Meridian)

$$r = 10,165 \text{ cm}$$

$$x = 3,55 \text{ cm}$$

$$n = 8$$

$$\underline{H' = 4,161 \cdot J}$$

2. Hilfsfeld

$$r = 9,563 \text{ cm}$$

$$x = 8,125 \text{ cm}$$

$$n = 8$$

$$\underline{H'' = 2,326 \cdot J}$$

Die Zuleitungen wurden, um Störungen zu vermeiden, zusammengedreht; auch wurde ihre Isolation geprüft. Die verwendeten Ströme wurden nach dem Ohmschen Gesetz berechnet aus Spannung und Widerstand.

Dazu wurde der Widerstand zweier Spulen bestimmt als:

$$w = 0,23 \Omega.$$

Hierzu kommt der Widerstand der Zuleitung, so daß für Spulen und Leitung zusammen genommen wurde:

$$w = 0,35 \Omega.$$

Anmerkung: Da diese Werte neben den verwendeten Widerständen von 120—900 S.E. kaum in Betracht kommen, so genügt eine angenäherte Bestimmung derselben.

Bestimmung des magnetischen Momentes M des Kompen-sierungsmagneten. Bezeichnen wir mit:

H die Horizontalkomponente des Erdfeldes,

F_i das abgeschwächte Feld am Ort des Magnetometers,

H_1, H_2, H_3 die Hilfsfelder senkrecht dazu,
 k die Konstante der Torsion¹⁾,
 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die Ausschlagswinkel des Magnetometers,
 a_1, a_2, a_3 die Abstände der Pole des Kompensierungsmagneten
 von der Mitte des Magnetometers,

so haben wir die Beziehungen:

$$\frac{H_1}{F_1 + k} = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad \text{und} \quad F_1 = H - \frac{M}{a_1^3},$$

damit erhalten wir aus drei Beobachtungen zwei Werte für M , nämlich:

$$\begin{aligned} H - \frac{M}{a_1^3} + k &= \frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha_1}, & M_1 &= \frac{\frac{H_1}{\operatorname{tg} \alpha_1} - \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2}}{\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_1^3}}, \\ H - \frac{M}{a_2^3} + k &= \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2}, & & \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{H_3}{\operatorname{tg} \alpha_3}, \\ H - \frac{M}{a_3^3} + k &= \frac{H_3}{\operatorname{tg} \alpha_3}, & M_3 &= \frac{\frac{1}{a_3^3} - \frac{1}{a_2^3}}{\frac{H_3}{\operatorname{tg} \alpha_3} - \frac{H_2}{\operatorname{tg} \alpha_2}}. \end{aligned}$$

Während der Dauer der Messung ist H als konstant angenommen.

Bei nachstehender Beobachtung wurde die am Fernrohr angebrachte Skale zur Bestimmung der Ausschlagswinkel benutzt; diese kann jedoch wegbleiben, wenn H_1 und a_1 bzw. H_2 und a_2 bzw. H_3 und a_3 so gewählt werden, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 45^\circ$ ist. Dann fällt auch die Messung des Skalenabstandes fort.

1) Mit den Bezeichnungen von Kohlrausch (Lehrb. d. prakt. Phys. 9. Aufl. p. 339) haben wir:

$$k = \Theta \cdot F = \frac{d}{M \cdot F} \cdot F = \frac{d}{M},$$

d. h. k ist eine Konstante unabhängig von F .

Die obigen Gleichungen können zugleich zur Bestimmung von H dienen, wenn Θ bestimmt wird. Außerdem muß dazu der Abstand x_1 des Kompensierungsmagneten vom Magnetometer sehr genau gemessen werden, da ein Fehler von 0,1 mm bei dieser Messung im Resultat einen Fehler von $4/_{10000} H$ ausmacht.

Soll aus diesen Gleichungen nur der Skalenwert ermittelt werden, so genügt eine rohe Messung von x_1 , da dieser Wert nur als Hilfswert zur Berechnung dient und ein Fehler wohl in M nicht aber im Endresultat zur Geltung kommt.

Wir haben als Konstanten:

$x_1 = 15,76$ cm Abstand des Komp.-Magneten im Anfangspunkt der seitlichen Skale,

$l = 3,69$ cm halber Polabstand ($\frac{1}{2}$ der halben Länge) des Komp.-Magneten, wo also:

$$a_1^2 = (x_1^2 + l^2)^{\frac{1}{2}},$$

$A = 28,25$ cm Skalenabstand,

$E = 2,062$ Volt Stromspannung.

Wir erhalten damit:

	Punkt I	Punkt II	Punkt III
Abstand	$x_1 = 15,76$ cm $\frac{1}{a_1^2} = 0,000\,235\,83$	$x_2 = 14,76$ cm $\frac{1}{a_2^2} = 0,000\,283\,98$	$x_3 = 13,76$ cm $\frac{1}{a_3^2} = 0,000\,345\,90$
Ausschlagswinkel	70,33 64,00 57,64 $\tg 2 \alpha_1 = \frac{6,345}{28,25}$	68,95 64,00 59,04 $\tg 2 \alpha_2 = \frac{4,955}{28,25}$	71,12 64,00 56,88 $\tg 2 \alpha_3 = \frac{7,155}{28,25}$
Widerstand	120 S.E. = 112,89 Ω $w = 0,35$ Ω $W_1 = 118,24$ Ω	250 S.E. = 235,18 Ω $w = 0,35$ Ω $W_2 = 235,58$ Ω	900 S.E. = 846,66 Ω $w = 0,35$ Ω $W_3 = 847,01$ Ω
Hilfsfeld	$H_1 = \frac{4,161 \cdot E}{10 \cdot W_1}$ abs. Einh. $= \frac{4,161 \cdot 2,062}{10 \cdot 118,24}$ $= 0,007\,576\,7$	$H_2 = \frac{4,161 \cdot E}{10 \cdot W_2}$ abs. Einh. $= \frac{4,161 \cdot 2,062}{10 \cdot 235,58}$ $= 0,008\,642\,75$	$H_3 = \frac{4,161 \cdot E}{10 \cdot W_3}$ abs. Einh. $= \frac{4,161 \cdot 2,062}{10 \cdot 847,01}$ $= 0,001\,018\,0$
	$\frac{H_1}{\tg \alpha_1} = 0,068\,311$	$\frac{H_2}{\tg \alpha_2} = 0,041\,854$	$\frac{H_3}{\tg \alpha_3} = 0,008\,125$
	$M_1 = \frac{0,026\,457}{0,000\,048\,15} = 549,46$,		
	$M_2 = \frac{0,083\,729}{0,000\,061\,92} = 544,72$.		
	<u>$M = 547,09$</u> .		

Berechnung des Skalenwertes. Aus dem magnetischen Moment des Komp.-Magneten wird die Größe der Feldänderung be-

rechnet, die einer gewissen Verschiebung dieses Magnetes am Orte des Magnetometers entspricht. Nach der Formel:

$$\text{Wert von } (x_2 - x_1) = M \left(\frac{1}{(x_1^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{(x_2^2 + l^2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

erhält man für die Skalenwerte folgende Tabelle:

Abstand des Komp.-Magnetes in cm	Wert eines Skalenteiles = 0,001 mm abs. Einh.
13,1	0,000 004 61
13,2	448
13,3	436
13,4	424
13,5	413
13,6	402
13,7	391
13,8	381
13,9	371
14,0	361
14,1	352

Empirische Bestimmung des Skalenwertes. Zu diesem Zweck werden in mehreren Stellungen des Komp.-Magnetes durch entsprechend gewählte Hilfsfelder H_1 , H_2 , H_3 Ablenkungen um 45° hervorgerufen. Dann wird jedesmal das Erdfeld um ein bestimmtes Feld H'' variiert und die Änderung durch Verschiebung des Magnetes wieder aufgehoben. So erhält man direkt den Skalenwert für die betreffenden Stellen; es geben dabei die zeitlichen Änderungen des Erdfeldes zu Störungen Anlaß, doch wird die Genauigkeit bei rascher Ausführung zu ruhiger Tageszeit eine befriedigende sein.

Wir hatten:

$$E = 2,038 \text{ Volt Stromspannung},$$

$$W = 250 + 0,85 \Omega \text{ Widerstand},$$

somit:

$$H'' = 2,826 \cdot J = \frac{2,826 \cdot 2,038}{10 \cdot 250,85}$$

$$= 0,0018935 \text{ abs. Einh.}$$

Die Messung ergab nun:

	Punkt I	Punkt II	Punkt III
Abstand	$x_1 = 13,685 \text{ cm}$	$x_2 = 13,935 \text{ cm}$	$x_3 = 14,360 \text{ cm}$
Mit $+H''$	$+ H_1$ 479,2 478,3 $- H_1$ 485,1 484,1	$+ H_2$ 511,6 511,5 $- H_2$ 511,0 511,1	$+ H_3$ 571,1 569,4 $- H_3$ 580,8 577,1
Größe der Ver-schiebung in Skalen-teilen	478,75 481,7 484,6	511,55 511,3 511,05	570,25 574,5 578,7
Mit $-H''$	$+ H_1$ 488,6 484,5 $- H_1$ 492,1 491,6	$+ H_2$ 517,8 518,5 $- H_2$ 527,0 528,5	$+ H_3$ 569,2 572,2 $- H_3$ 577,6 580,1
Mittel	484,75	516,5	574,6
Skalenwert	0,000 003 906	0,000 003 666	0,000 003 295
Aus der Tabelle	0,000 003 926	0,000 003 675	0,000 003 820

Die Abweichungen betragen also weniger als 1 Proz. des Skalenwertes.

Nachprüfung des Skalenwertes. Ist dieser einmal in der angegebenen Weise bestimmt worden, so kann er jederzeit leicht nachgeprüft werden unter Anwendung des zweiten Hilfsfeldes und des Ablenkungsmagneten. So wurde obige Bestimmung zwei Monate später nachgeprüft, man hatte:

$$E = 2,034 \text{ Volt Stromspannung},$$

$$W = 250 \text{ S.E.} + 0,35 \Omega \text{ Widerstand},$$

somit:

$$H'' = 2,326 \cdot J = \frac{2,326 \cdot 2,034}{10 \cdot 235,53}$$

$$= 0,002 008 9 \text{ abs. Einh.}$$

Man erhielt als Verschiebungen:

Mit + H''	563,7		Mit - H''	566,4	
	562,0			569,7	
	558,6	Mittel:		567,6	Mittel:
	556,2	558,0		565,2	567,6
	554,0			568,8	
	554,0			567,9	

Dies ergibt für Punkt 14,057 cm als Skalenwert 0,000008569,
während die Tabelle angibt 0,000008559.

Der Skalenwert war also unverändert.

Die Messungen.

Zu den eigentlichen Messungen werden die Stromspulen entfernt, so daß der Apparat handlich und leicht transportabel ist. Die Aufstellung geschieht rasch mit Hilfe des Mikroskops. Der Apparat wird auf den Meridian eingestellt, der Ablenkungsmagnet umgelegt und der Schlitten verschoben, bis die Ablenkung 45° beträgt. Die Stellung des Schlittens wird abgelesen, der Magnet nach der anderen Seite umgelegt, wieder eingestellt und abgelesen. Nach beliebigen Zeitabschnitten wird von neuem auf den Meridian eingestellt, nach beiden Seiten auf 45° abgelenkt und jedesmal die Stellung des Schlittens abgelesen.

Die Messungen nach beiden Seiten sind ganz selbstständig, man erhält also zwei voneinander unabhängige Werte, die einem zeitlichen Unterschied von ungefähr 1 Min. entsprechen.

Um etwaige Fehler aus einem toten Gang der Schraube zu vermeiden, wurde bei nachstehenden Beobachtungen stets in derselben Richtung eingestellt. Die Beleuchtung des Okulars erfolgte durch ein Auerlicht, das in 1,5 m Entfernung vom Apparat aufgestellt war, und dessen Strahlung von den übrigen Teilen des Apparates abgeschirmt war. Die Temperatur wurde auf $0,1^\circ$ genau beobachtet.

Um die Deklinationsschwankungen zu verfolgen, wird in einem Abstand ein Fernrohr mit Skale aufgestellt.

Zeit	Neues Variometer			Vierstabvariometer				Deklination			Temp.		
	Ablese.	Variat.	Mittel	Wert	Ablese.	Diff.	Variat.	Wert	Ablese.	Variat.	Wert		
2	217,1	0	0	0	176,9	47,1	0	0	503,9	0	0"	15,8	
2 ¹⁵	204,0	0	2,6	1,3	0,0000049	176,8	47,0	0,05	0,000008	504,5	0,6	48"	15,8
2 ³⁰	204,0	0	0	0	129,8	129,8	0	0	1' 20"	15,9			
2 ⁴⁵	208,0	9,1	11,0	0,0000418	176,1	46,4	0,85	0,000054	504,9	1,0			
3	191,0	13,0			130,7								
3 ¹⁵	189,0	26,1	30,5	0,0001159	175,0	43,1	2,0	0,000127	504,8	0,9	1' 12"	16,1	
3 ³⁰	171,1	82,9	42,1	0,0001600	174,2	42,6	2,25	0,000143	504,6	0,7	56"	16,1	
4	175,9	41,2	48,1		131,6								
4 ¹⁵	160,9	56,3	54,6	0,0002075	173,7	41,7	2,7	0,000172	504,4	0,5	40"	16,2	
4 ³⁰	151,1	52,9	64,1	0,0002508	132,0	172,9	39,6	0,000238	504,7	0,8	1' 4"	16,2	
5	153,0	68,0	66,0	0,0002626	133,3	39,6	3,75	0,000238	505,0	1,1	1' 28"	16,2	
5 ¹⁵	149,7	67,4	69,1	0,0002630	172,8	39,6	3,75	0,000238	505,5	1,6	2' 7"	16,3	
5 ³⁰	138,2	70,8	69,0	0,0002459	180,9	41,9	2,6	0,000165	506,1	2,3	2' 55"	16,3	
6	148,1	69,0	69,2	0,0002459	172,6	39,6	3,75	0,000288					
6 ¹⁵	134,5	69,5	66,5	0,0002459	188,0								
6 ³⁰	141,0	68,0	64,7										
7	157,7	59,4	60,7	0,0002807	172,9	39,0	+ 4,05	0,000257	506,6	2,7	3' 35"	16,4	

1.41,0	68,0	64,7	0,0002459	188,0	-	39,6	8,75	0,0002388	//	506,1	2,2	2° 55''	16,8	16,4
1.41,0	68,0	64,7	0,0002459	188,0	-	39,6	8,75	0,0002388	//	506,1	2,2	2° 55''	16,8	16,4
167,7	59,4	60,7	0,0002307	172,9	89,0	- 4,05	0,000257	506,6	2,7	3' 35"				
141,9	62,1	60,7	0,0002307	188,9	112,5	37,8	4,65	506,4	2,6	3' 27"				
145,0	72,1	72,9	0,0002770	134,7	172,9	36,7	5,2	0,000330	506,1	2,2	2' 55''			
180,8	73,7	81,8	0,0003108	186,2	172,3	35,3	5,9	0,000375	506,0	2,1	2' 47''			
135,4	81,7	90,2	0,0003428	137,0	171,0	36,6	5,25	0,000383	505,8	1,9	2' 31''			
122,1	81,9	104,6	0,0003975	134,4	170,4	38,2	6,95	0,000441	505,9	2,0	2' 39''			
128,4	88,7	115,2	0,0004378	137,2	168,6	30,9	8,1	0,000514	506,9	3,0	3' 59''			
112,2	91,8	118,1	0,0004663	187,7	169,3	32,3	7,4	0,000470	506,7	2,8	3' 43''			
112,9	104,2	122,7	0,0004587	137,0	169,9	33,6	6,75	0,000429	504,9	1,0	1' 20''			
98,9	105,1	127,3	0,0004324	186,3	172,6	37,9	4,6	0,000292	506,7	2,8	3' 48''			
103,9	118,2	117,8	0,0004663	134,7	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
86,7	117,8	120,7	0,0004587	181,1	171,3	36,5	5,3	0,000337	512,6	8,7	11' 38''			
99,0	118,0	123,5	0,0004324	134,8	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
76,7	114,2	113,8	0,0002585	186,3	172,6	37,9	4,6	0,000292	506,7	2,8	3' 48''			
90,6	118,4	66,7	0,0002585	134,7	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
148,6	68,5	64,9	0,0002585	181,1	171,3	36,5	5,3	0,000337	512,6	8,7	11' 38''			
139,1	68,4	30,3	0,0001151	134,8	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
181,0	36,1	24,6	0,0001151	181,1	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
179,4	68,4	66,7	0,0002585	134,8	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
153,7	68,4	70,0	0,0002585	134,8	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			
134,0	68,4	66,7	0,0002585	134,8	174,8	43,7	1,7	0,000108	509,1	5,2	6' 54''			

Zeit	Neues Variometer			Vierstabvariometer			Deklination			Temp.		
	Ablese.	Variat.	Mittel	Wert	Ablese.	Diff.	Variat.	Wert	Ablese.	Variat.	Wert	
7 ³⁰	163,0	54,1	55,5	0,0002109	171,0	38,7	4,2	0,000267	512,6	8,7	11' 33"	16,7
7 ⁴⁵	147,1	58,9	55,5	132,3	170,7	37,8	4,65	0,000295	509,1	5,2	6' 54"	16,7
7 ⁴⁶	145,0	72,1	68,9	0,0002818	132,9	171,8	4,2	0,000267	506,6	2,7	8' 35"	16,8
8	138,2	65,8	68,9	0,0002879	138,1	38,7	4,2	0,000273	506,2	2,3	8' 3"	16,8
8 ¹⁵	154,3	62,8	62,6	0,0002867	171,0	38,5	4,3	0,000274	504,4	0,5	40"	16,8
8 ¹⁶	141,5	62,5	61,7	0,0002874	132,5	172,2	4,95	0,000314	505,9	2,0	2' 39"	16,8
8 ¹⁷	155,4	62,3	63,0	0,0002867	135,0	37,2	—	—	610,0	0	—	—
8 ¹⁸	141,0	76,1	73,0	0,0002774	171,7	36,6	5,25	0,000333	509,7	-0,3	-24"	—
8 ¹⁹	134,1	69,9	81,6	0,0003108	135,1	132,1	—	—	508,6	-1,4	-1' 52"	—
8 ²⁰	135,5	82,1	—	—	—	—	—	—	509,3	-0,7	56"	16,2
9 ¹⁰	—	—	—	—	—	—	—	—	509,0	-1,0	-1' 20"	16,0
9 ¹⁵	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10 ¹⁶	103,2	0	0	0	169,3	34,4	0	0	510,7	+0,7	+56"	16,4
10 ¹⁷	86,5	0	0	0	134,9	—	—	—	—	—	—	—
10 ¹⁸	88,4	19,8	17,1	0,0000650	167,3	32,3	1,05	0,0000097	510,0	-0,5	-0,0000032	16,4
10 ¹⁹	72,1	14,4	—	—	185,0	—	—	—	—	—	—	—
10 ²⁰	108,6	—	5,4	—	10,9	—	—	—	—	—	—	—

Neues Universalvariometer für Lokalvariationen usw. 797

	14,4	14,4	0,00006550	16,3	32,3	1,05	0,0000667	509,0	-1,0	-1' 20"	16,9	
10 ⁴⁸	108,6	-5,4	-10,9	-0,0000414	168,4	-0,5	-0,0000032	510,7	+0,7	+ 56"	16,4	
11	103,0	-16,5	-16,5	-0,0000032	188,0	35,4	-0,0000067	511,8	1,8	2' 23"	16,8	
11 ¹³	119,9	-16,7	-16,0	-0,0000619	169,9	36,5	-1,05	-0,000006	511,9	1,9	2' 31"	16,4
11 ⁴⁵	95,4	7,8	8,1	0,0000808	168,6	34,6	-0,1	-0,000006	513,6	3,6	4' 47"	16,5
11 ³⁰	78,0	8,5	8,5	0,0000864	134,0	36,3	-0,95	-0,0000060	515,2	5,2	6' 54"	16,3
11 ⁴⁸	64,7	35,9	35,9	0,0001864	167,2	36,3	-0,8	-0,000019	514,7	4,7	6' 14"	16,4
12	105,1	-1,9	-7,6	-0,0000289	168,9	35,0	-0,95	-0,0000060	515,2	3,5	4' 39"	16,5
12 ¹⁵	99,8	-13,3	-41,7	-0,0001797	130,9	39,5	-2,55	-0,000162	514,9	4,9	6' 30"	16,4
12 ⁴⁰	139,5	-53,0	-47,3	-0,00001797	170,9	131,4	-3,9	-0,000248	515,2	5,2	6' 54"	16,8
12 ⁴⁵	157,0	-63,4	-53,8	-0,0002227	178,1	130,9	-3,9	-0,000098	515,2	4,2	5' 34"	16,5
13	149,9	-63,4	-58,6	-0,0000205	171,7	134,2	-1,55	-0,0000041	516,4	6,6	8' 29"	16,4
13 ¹⁰	137,3	-34,1	-34,3	-0,0001803	184,2	87,5	-0,65	-0,0000060	516,6	6,6	8' 45"	16,5
13 ⁴⁵	121,0	-34,5	-34,5	-0,0000847	169,2	136,1	0,75	0,000048	516,6	6,4	8' 29"	16,4
14	96,2	7,0	5,4	0,0000205	171,7	133,1	0,65	0,0000041	516,6	4,2	5' 34"	16,5
14 ¹⁵	82,6	3,9	5,4	0,0000258	168,4	139,5	0,75	0,0000060	516,6	6,6	8' 45"	16,5
14 ⁴⁰	78,1	25,1	22,3	0,0000847	170,5	134,2	-0,95	-0,0000032	516,6	3,5	4' 39"	16,5
15	66,9	19,6	22,3	0,0000794	166,7	131,3	-0,5	-0,0000060	516,6	3,5	4' 39"	16,5
15 ¹⁰	96,1	7,1	6,8	0,0000258	170,5	134,2	-0,95	-0,0000060	516,6	6,6	8' 45"	16,5
15 ⁴⁵	80,0	6,5	6,5	0,0000258	166,7	131,3	-0,5	-0,0000060	516,6	6,6	8' 45"	16,5

1. Zeitliche Variationen von Intensität und Deklination.

Folgende Messungen wurden im Erdgeschoß des physikalischen Instituts zu Tübingen am 10. II. 07 von 2^h mittags bis 8^h 45^m abends und am 7. II. 07 von 9^h 30^m bis 1^h 30^m nachts ausgeführt. Zur Kontrolle wurden in einiger Entfernung gleichzeitige Beobachtungen mit Kohlrauschs Vierstabvariometer gemacht. Da beide Messungen von einem Beobachter ausgeführt wurden, sind die Ablesungen am Vierstabvariometer etwa 2 Min. nach den anderen erfolgt; es erklären sich daraus die an einigen Stellen auftretenden größeren Abweichungen beider Messungen (vgl. Fig. 3).

Als Konstanten haben wir:

$$\begin{aligned} A &= 129,6 \text{ cm Skalenabstand des Deklinationsfernrohres}, \\ E &= \frac{1}{2 \pi} \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{510} \cdot \operatorname{tg} 10,2^\circ \\ &= 0,0003528 \cdot H, \\ \text{mit } H = 0,18 &= 0,00006350 \text{ abs. Einh. Skalenwert des Vierstab-variometers.} \end{aligned}$$

Für das neue Variometer kann der Skalenwert für den Bereich der Messung als konstant angesehen werden und zwar für den Abstand:

$$15,76 - 1,95 = 13,81 \text{ cm Skalenwert} = 0,00000380 \text{ abs. Einh.}$$

2. Lokalvariation.

Diese Messung wurde ausgeführt in dem eben benutzten Lokal und in dem ein Stockwerk höher gelegenen Maschinen-saal. Um einen Mittelwert zu erhalten, wurden an beiden Orten je vier Beobachtungen gemacht. Während der Mes-sungen wurden gleichzeitig die zeitlichen Variationen mit dem Vierstabvariometer beobachtet, um diese im Resultat berück-sichtigen zu können.

Um diese Lokalvariation mit dem Vierstabvariometer messen zu können, erwies es sich als notwendig, das Hilfs-feld desselben bedeutend zu verstärken. Man erhielt dann als Skalenwert:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2 \pi} \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{510} \cdot \operatorname{tg} 23,8^\circ \\ &= 0,0008444 \cdot H \\ &= 0,0001520 \text{ abs. Einh.} \end{aligned}$$

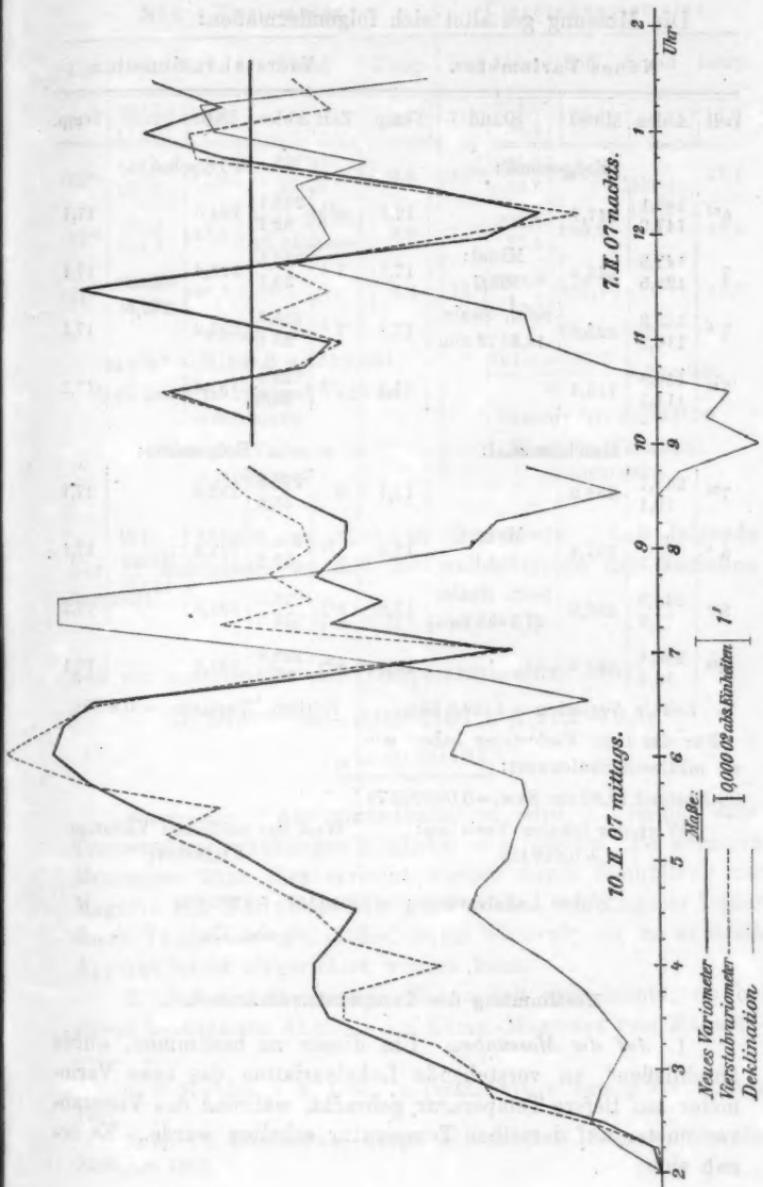


Fig. 3. Zeitliche Variationen von Intensität und Deklination.

Die Messung gestaltet sich folgendermaßen:

Neues Variometer.					Vierstabvariometer.				
Zeit	Ables.	Mittel	Stand	Temp.	Zeit	Ables.	Diff.	Stand	Temp.
Erdgeschoß:					Erdgeschoß:				
6 ⁵⁵	148,1 147,3	147,7		17,1	6 ⁵⁸	226,1 32,1	194,0		17,1
7	147,3 188,5	142,9 182,7	Mittel:	17,1	7 ⁸	226,5 33,1	193,4	Mittel:	17,1
7 ⁵	188,3 116,3	124,8 16,8673 mm	Seitl. Skale:	17,1	7 ¹⁸	225,7 33,4	192,3	192,8	17,1
7 ¹⁰	116,3 114,5	115,4		17,2	7 ¹⁸	225,4 34,0	191,4		17,2
Maschinensaal:					Erdgeschoß:				
7 ⁵⁵	248,7 19,1	258,9		17,1	8	225,6 33,6	192,0		17,1
8 ⁵	238,7 14,1	251,4 254,1	Mittel:	17,3	8 ¹⁰	224,9 33,6	191,3	Mittel:	17,1
8 ¹⁵	244,9 17,2	256,0 21,9959 mm	Seitl. Skale:	17,2	8 ²⁰	225,1 33,9	191,2	191,6	17,2
8 ²⁵	238,4 16,4	249,9		17,1	8 ²⁰	225,8 33,9	191,9		17,1
Lokale Variation = 5128,6 Skt.					Zeitliche Variation = 0,6 Skt.				
Für das neue Variometer haben wir als mittleren Skalenwert:									
im Abstand 18,82 cm Skw. = 0,000 008 79									
Wert der lokalen Variation: + 0,019 437					Wert der zeitlichen Variation: + 0,000 091				
Wahre Lokalvariation = 0,019 437 - 0,000 091 = 0,019 346 abs. Einh.									

Bestimmung des Temperatureinflusses.

1. Auf die Messungen. Um diesen zu bestimmen, wurde anschließend an vorstehende Lokalvariation das neue Variometer auf tiefere Temperatur gebracht, während das Vierstabvariometer auf derselben Temperatur erhalten wurde. Es ergab sich:

Neues Variometer.					Vierstabvariometer.				
Zeit	Ables.	Mittel	Stand	Temp.	Zeit	Ables.	Diff.	Stand	Temp.
11 ³⁰	160,1	170,0		9,7	11 ³⁵	224,6	188,2		17,2
	179,9					36,4			
11 ³⁰	148,0	157,9	Mittel:	9,6	11 ³⁵	223,6	187,0	Mittel:	17,1
	167,8		156,0			36,6			
11 ⁴⁰	141,0	147,8	Seitl. Skale:	9,6	11 ⁴⁵	223,6	186,2	187,3	17,1
	154,6		21,8440 mm			37,4			
11 ⁵⁰	189,0	148,8		9,4	11 ⁵⁵	214,9	187,7		17,1
	157,6					87,2			
Variation:					Variation:				
$21995,9 - 21844,0 = 151,9$ Skt.					$\frac{191,6 - 187,3}{2} = 2,15$ Skt.				
Skalenwert im Abstand 18,57 cm:					Skalenwert: 0,0001520				
0,00000406					Wert der Variation:				
Wert der Variation:					$+ 0,0003266$				
$- 0,0006167$									

Wir können nun für den Temperatureinfluß folgende Formel aufstellen, wo dH die wahre Größe der Variation darstellt:

$$dH = dH'_t + \mu(t - t'),$$

und wir erhalten für den Temperaturkoeffizienten:

$$0,0003266 = - 0,0006167 + \mu(17,2 - 9,6),$$

$$\mu = 0,000124.$$

Anmerkung. Am vorteilhaftesten wird es immer sein, Temperaturschwankungen möglichst zu vermeiden. Bei kürzeren Messungen kann dies erreicht werden durch Umhüllung der Magnete mit Watte oder Filz¹⁾, bei solchen von längerer Dauer durch Temperierung mit fließendem Wasser²⁾, die an unserem Apparat leicht eingerichtet werden kann.

2. Auf den Skalenwert. Es handelt sich darum, ob bei einem bestimmten Abstand des Komp.-Magneten vom Magneto-

1) F. Kohlrausch, Lehrb. d. prakt. Phys. 9. Aufl. p. 334. Leipzig 1901.

2) M. Th. Edelmann, Neuere Apparate f. N. Schw. u. F. p. 105. Stuttgart 1882.

meter der Skalenwert bei jeder beliebigen konstanten Temperatur derselbe ist. Der Skalenwert wurde berechnet als:

$$E = M \left(\frac{1}{a_2^3} - \frac{1}{a_1^3} \right),$$

er wird sich also wesentlich proportional mit M ändern. Da der Temperaturkoeffizient eines Magneten maximal 0,001 beträgt¹⁾, so wird der Temperatureinfluß auf den Skalenwert in normalen Grenzen zu vernachlässigen sein.

In Übereinstimmung damit ergab die Messung als Skalenwerte:

bei 23°	0,00000381
bei 15,9°	0,00000379

Der Unterschied liegt also innerhalb der Beobachtungsfehler.

Allgemeines.

Die Grundlage zu dieser Arbeit bildet der von Herger²⁾ schon 1844 ausgesprochene Gedanke eines Intensitätsmagnetometers unter Benützung der Verhältnisse in unmittelbarer Nähe des Indifferenzpunktes eines Magneten (d. h. des Punktes, in welchem Magnetfeld und Erdfeld sich kompensieren). Die starken Richtungsänderungen der Kraftlinien um diesen Punkt sollten durch eine kleine Nadel beobachtet werden und als Maß dienen für die Verschiebungen des Punktes infolge der Änderungen der Intensität des Erdfeldes.

Große Schwierigkeit machte Herger die Trennung der beiden Einflüsse von Deklinations- und Intensitätsschwankungen, und er hielt schließlich nur eine Lösung für möglich. Er schlug vor, das ganze System des Magneten und der fest mit diesem verbundenen Nadel an einem Faden aufzuhängen. Ein aus Aluminium provisorisch hergestelltes Modell zeigte die praktische Untauglichkeit dieser Anordnung infolge zu geringer Stabilität, was auch der Grund dafür sein mag, daß Hergers Anregung ungenutzt blieb.

Hrn. Professor Dr. Paschen, dem Vorstand des physikalischen Instituts Tübingen, gelang es nun eine andere Lösung dieser Aufgabe zu finden, deren Auswertung diese Arbeit darstellt.

1) F. Kohlrausch, l. c. p. 336.

2) J. E. Herger, Die Systeme der magnetischen Kurven, Kap. VI. Leipzig 1844.

Dadurch, daß die Magnetnadel nicht, wie bei Herger, seitwärts von der Äquatorialebene des Magnets gesetzt wird, sondern in diese hinein mit der Richtung senkrecht zu ihr, wird erreicht, daß die Nadel zunächst von Intensitätsänderungen in ihrer Richtung nicht beeinflußt wird und nur Deklinationsänderungen angibt. Nachdem der ganze Apparat durch mikrometrische Drehung diesen gefolgt ist, können die Intensitätsänderungen des Erdfeldes dadurch zur Geltung gebracht werden, daß ein zum Erdfeld senkrechttes Feld von bestimmter Größe eingeschaltet wird.

Das Deklinationsinstrument stellt also ein kompensierte Variometer dar, wie es Barlow¹⁾ im Prinzip anwandte. Vor den sonst gebräuchlichen nicht kompensierten Variometern (Gauss, Gambey, Lamont) hat es den Vorzug einer wesentlich gesteigerten Empfindlichkeit, einer nahezu vollkommenen Dämpfung, eines kleinen Lokaleinflusses und der vollständigen Unabhängigkeit von der Torsion des Aufhängefadens. Die Genauigkeit der Ablesung dürfte etwa 8" betragen.

Transportable und selbständige Apparate zur Messung der Intensitätsänderungen sind die Variometer von Kohlrausch²⁾ und das von Heydweiller³⁾, von denen das Kohlrauschsche Vierstabvariometer⁴⁾ für die meisten Fälle das geeignete und leistungsfähigste sein dürfte. Das neue Variometer beruht auf demselben Prinzip wie dieses (Kompensierungs- und Ablenkungsmagnet) und leistete bei dem anfangs angewandten Ablenkungswinkel von wenigen Graden etwa dasselbe.

Die Einführung eines konstanten Ablenkungswinkels erspart die Skalenablesung und die Messung des Skalenabstandes, und vereinfacht dadurch die Messungen. Einen konstanten Ablenkungswinkel gebrauchte auch Edelmann⁵⁾ bei seinem Magnetometer. Er benützte als Maß die Verschiebungen des Ablenkungsmagneten, hatte aber keine Kompensation und einen Ablenkungswinkel von wenigen Graden.

1) E. Mascart, *Traité de Magnétisme Terrestre*, p. 189. Paris 1900.

2) F. Kohlrausch, *Wied. Ann.* 15. p. 540. 1882.

3) A. Heydweiller, *Wied. Ann.* 64. p. 735. 1898.

4) F. Kohlrausch, *Wied. Ann.* 19. p. 138. 1883.

5) M. Th. Edelmann, *Neuere Apparate f. N. Sch. u. F.* p. 8.

Es erweist sich jedoch als ganz besonders vorteilhaft, einen Ablenkungswinkel von 45° einzuführen, wie nachstehende Rechnung zeigt.

Bezeichnen wir mit:

F das kompensierte Feld,

H' das Ablenkungsfeld,

$d H$ die Intensitätsänderung,

α_1, α_2 die Ablenkungswinkel,

so haben wir:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{H'}{F}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{H'}{F + d H},$$

$$d \alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\frac{H'}{F} - \frac{H'}{F + d H}}{1 + \frac{H'}{F} \cdot \frac{H'}{F + d H}} = \frac{H' \cdot d H}{F(F + d H) + H'^2}$$

$$= \frac{\frac{d H}{H'}}{\frac{F(F + d H)}{H'^2} + 1}.$$

Setzt man als Annäherung:

$$F(F + d H) = F^2,$$

so erhält man:

$$d \alpha = \frac{d H}{F \operatorname{tg} \alpha (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)} = \frac{d H}{2 F} \sin 2 \alpha.$$

$d \alpha$ ist also ein Maximum für $\alpha = 45^\circ$ und zwar gibt:

$$\alpha = 1^\circ \dots \dots \dots d \alpha = 0,0349 \cdot k d H$$

$$\alpha = 45^\circ \dots \dots \dots d \alpha = 1 \cdot k d H$$

$$\alpha = 89^\circ \dots \dots \dots d \alpha = 0,0349 \cdot k d H$$

d. h. $d \alpha$ ist bei 45° etwa 30mal so groß als bei 1° oder 89° Ablenkung. Neben dieser vermehrten Empfindlichkeit wird durch das Gaußsche Okular mit Doppelfaden auch eine erhöhte Genauigkeit der Einstellung erzielt.

Ein weiterer Vorzug des neuen Magnetometers ist der Umstand, daß die Kompensierung während einer Messung konstant bleibt; es kann dadurch außerordentlich stark kompensiert und damit sehr empfindlich gemacht werden. Beim Vierstabvariometer muß dagegen ein ziemlich großer Spielraum gelassen werden, damit das Kompensierungsfeld nicht während der Messung zu schwach wird. (Vgl. die Lokalvariation.)

Sodann setzt sich beim Vierstabvariometer die Messung aus zwei Beobachtungen zusammen; beim neuen Variometer kann dagegen mit einer Ablesung gemessen werden, bzw. es

wird bei einer Doppelmessung der Fehler wesentlich kleiner werden.

In vielen Fällen wird es auch von Vorteil sein, daß die Resultate in absolutem Maß gegeben sind. Für genauere Messungen muß sonst H bestimmt werden, denn die ausgeführte Lokalvariation zeigt, daß in Gebäuden die Horizontalintensität leicht um 10 Proz. verschieden sein kann und daher kein Näherungswert genommen werden darf.

Die für das Vierstabvariometer angegebene Genauigkeit von $\frac{1}{10000} H$ dürfte nicht immer erreicht werden, denn mögen die Fehler der Aufstellung etwa $\frac{5}{100000} H$ ausmachen, so wird bei einem Skalenwert von 0,00084 H noch dazu mit einem Ablesungsfehler von mehr als $\frac{5}{100000} H$ gerechnet werden müssen.

Die Genauigkeit des neuen Variometers wurde bestimmt, indem eine durch die Hilfsspule hervorgebrachte konstante Feldänderung wiederholt gemessen wurde. *

Man erhielt:

Ables.	Verschiebung	Fehler	Quadr.
44,4			
48,8	495,6	-0,7	0,49
42,6			
44,8	497,8	+1,5	2,25
42,5			
45,6	496,9	+0,6	0,36
37,8			
42,6	495,2	-1,1	1,21
35,6			
40,4	495,2	-1,1	1,21
28,2			
30,9	497,3	+1,0	1,00
45,9			
50,7	495,2	-1,1	1,21
51,9			
56,0	495,9	-0,4	0,16
54,0			
58,0	496,0	-0,8	0,09
52,0			
54,0	498,0	+1,7	2,89
Mittel: 496,8 ± 1,7		Summe: 10,87	

Mittlerer Fehler
einer Ablesung:

$$= \pm \sqrt{\frac{10,87}{9}}$$

$$= \pm 1,01 \text{ Skt.}$$

$$= \pm 0,0000089$$

Mittlerer Fehler aus
zwei Ablesungen:

$$= \pm \sqrt{\frac{10,87}{2 \cdot 9}}$$

$$= \pm 0,71 \text{ Skt.}$$

$$= \pm 0,0000028$$

Größte Abweichung vom Mittel:

$$= 1,7 \text{ Skt.}$$

$$= 0,0000066.$$

Das neue Variometer leistet also für Intensitätsmessungen zwei- bis dreimal soviel als das Vierstabvariometer, insbesondere da vorstehende Bestimmung der Genauigkeit noch gestört ist durch die zeitlichen Änderungen während der Dauer zweier Ablesungen. Die Leistungen des Apparates dürften somit sowohl als Deklinationsvariometer wie als Intensitätsvariometer weitgehende Ansprüche befriedigen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Paschen, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen für das mir stets erwiesene Wohlwollen und die freundliche Unterstützung bei der Ausführung dieser Arbeit. Auch Hrn. Privatdozent Dr. Gans fühle ich mich zu großem Dank verpflichtet für das fördernde Interesse, das er meiner Arbeit stets entgegengebracht hat.

(Eingegangen 11. Januar 1908.)

10. Zur Theorie des Adhäsionsplattenversuches; von Theodor Lohnstein.

Zu denjenigen Phänomenen auf dem Gebiete der Kapillarität, die am längsten bekannt und demgemäß auch vielfach experimentell und theoretisch behandelt worden sind, gehört die Erscheinung der Adhäsionsplatten (bzw. Adhäsionsringe). Man sollte daher glauben, daß das Problem längst in einwandfreier Weise erledigt sei. Das ist aber keineswegs der Fall, wie die vor mehreren Jahren veröffentlichte Arbeit des Hrn. W. Gallenkamp¹⁾ beweist. In dieser Arbeit wird auf der Basis einer fehlerhaften Theorie eine irrite Schlußfolgerung bezüglich des sogenannten *Randwinkels* gezogen, gegen die bisher nur Hr. G. Quincke²⁾, leider auf unzutreffende Argumente gestützt³⁾, Einspruch erhoben hat. Um daher künftigen falschen Darstellungen des Gegenstandes einen Riegel vorschieben⁴⁾, möchten wir im folgenden das Problem einer nochmaligen Betrachtung unterziehen. Wir wollen uns dabei auf den der Analysis allein leichter zugänglichen Fall der kreisförmigen Platten beschränken und diese der Einfachheit halber obenein als scharfkantig voraussetzen.

Die älteste mathematische Behandlung des Themas röhrt, soweit uns bekannt, von Poisson⁵⁾ her. Um den konstanten Benetzungswinkel, unter dem der Theorie nach eine freie Flüssigkeitsoberfläche an die glatte Oberfläche eines festen Körpers herantritt, in die Entwicklung einführen zu können, faßt Poisson die scharfe Kante als Grenze einer gekrümmten Oberfläche auf, welche den Übergang zwischen der Grundfläche

1) W. Gallenkamp, Ann. d. Phys. 9. p. 475. 1902.

2) G. Quincke, Ann. d. Phys. 10. p. 458. 1903.

3) Vgl. die Fußnote am Schluß dieser Arbeit.

4) Daß dies nötig ist, geht aus dem soeben erschienenen dritten Bande der neuen Auflage von Müller-Pfaudlers Handbuch der Experimentalphysik hervor, in dem der Bearbeiter des einschlägigen Kapitels, Hr. Dr. K. Drucker, die Schlußfolgerung Gallenkamps bereits als tatsächliches Ergebnis vorträgt (p. 299).

5) G. Poisson, Nouvelle Théorie de l'Action capillaire, Paris 1831. p. 226 sq.

und der zylindrischen Seitenfläche der Adhäsionsplatte bildet. Für das Gewicht, das nötig ist, um die Adhäsionsplatte um die Höhe k über das allgemeine Niveau der Flüssigkeit zu heben, leitet er ganz richtig folgenden Ausdruck ab:

$$(1) \quad p = \pi m k r^2 - \pi m r a^2 \cos(i + \omega).$$

Darin ist r der Halbmesser der Adhäsionsplatte, m das Gewicht eines Kubikzentimeters der Flüssigkeit, a die aus der Theorie der Kapillarität bekannte Konstante, ω das Supplement des Benetzungswinkels, i der Winkel, den die nach dem Innern der Platte auf der genannten Übergangsfläche in einem Punkte der Berührungsleitung errichtete Normale mit dem zugehörigen Halbmesser der Platte ein schließt. Natürlich stellt der vorstehende Ausdruck gleichzeitig auch das Gewicht der über das Niveau gehobenen Flüssigkeitsmenge dar.

Für die experimentelle Praxis interessiert nun in erster Linie die Frage: Welches Gewicht muß man auflegen, um die Platte zum Abreißen zu bringen? Die Antwort auf diese Frage ist ganz analog der Lösung des Abtropfproblems. So lange beim langsamen Austritt einer Flüssigkeit aus einer Öffnung sich eine den Gesetzen der Kapillarität entsprechende, die Flüssigkeit nach unten begrenzende Gleichgewichtsoberfläche bilden kann, so lange fällt kein Tropfen ab; erst wenn dies nicht mehr möglich ist oder, mathematisch gesprochen, das ausgetretene Volumen ein Maximum erreicht hat, reißt sich ein Teil der Flüssigkeit als Tropfen ab. Genau entsprechend verhält es sich im Falle der Adhäsionsplatten. So lange es der Adhäsionsplatte möglich ist, ein Flüssigkeitsvolumen in die Höhe zu heben, dessen der Luft zugewandte freie Oberfläche der bekannten Differentialgleichung genügt, so lange folgt die Flüssigkeit dem Zuge der Adhäsionsplatte; erst wenn das gehobene Flüssigkeitsvolumen ein Maximum erreicht hat, reißt die Platte ab. Die physikalische Erscheinung hat also in beiden Fällen ihr Korrelat in einem analytischen Faktum, ein Sachverhalt, der durch die landläufigen Darstellungen beider Probleme mehr oder weniger verschleiert worden ist.

Der Hauptsache nach ist dieser Umstand wohl auf die Art und Weise zurückzuführen, in der Poisson aus der Gleichung (1) das Problem weiter entwickelt, und die darauf beruht, daß es für das in der Formel vorkommende k keinen

Ausdruck gibt, der diese Größe für alle Werte von r und $i + \omega$ in einer für die physikalische Praxis brauchbaren Weise darstellt. Wenn man endliche Ausdrücke verlangt, so muß man sich daher notgedrungen auf die Grenzfälle beschränken, d. h. die Fälle, in denen r entweder sehr klein oder sehr groß ist. Diese Fälle behandelt nun Poisson in der Tat. Für kleine r findet er so:

$$(2) \quad k = r \left(\log \frac{2 a \sqrt{2}}{r(1 + \sin \varphi)} - c \right),$$

worin $i + \omega = \varphi$ gesetzt und $c = 0,57721$, d. h. die Eulersche Konstante ist. Aus der Herleitung dieser Formel folgt, daß sie erst für viel kleinere Werte von r/a gilt, als für die experimentelle Praxis in Betracht kommen; es ist daher kein Wunder, daß die von Poisson zu ihrer Prüfung herangezogenen Versuchszahlen Gay-Lussacs ziemlich starke Abweichungen ergeben. Immerhin aber gibt Poissons Ausdruck für hinlänglich kleine r den analytischen Charakter der Funktion k ausreichend wieder.

Poisson legt sich des weiteren nun richtig die Frage nach dem Maximum des Ausdrückes (1) vor; um sich ihre Beantwortung zu erleichtern, bemerkt er, daß für kleine r das erste Glied der Formel gegenüber dem zweiten vernachlässigt werden kann, und daß daher das Maximum von p mit dem Maximum des Ausdrückes $-\pi m r a^2 \cos(i + \omega)$ zusammenfällt, d. h. für $i + \omega = \pi$ eintritt. Das ist aus dem Grunde fehlerhaft, weil ja auch der vernachlässigte Teil von $i + \omega$ abhängt. Wir wollen, um uns an die Bezeichnungsweise der neueren Autoren anzuschließen, $i + \omega = \pi/2 + \vartheta$ setzen, weiter im folgenden anstatt $m \sigma$, anstatt $k y$, anstatt $p G$ schreiben und außerdem in üblicher Weise neben a von der Kapillaritätskonstante $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \sigma$ Gebrauch machen; ϑ ist dann der Winkel, unter dem die Elemente der Flüssigkeitsoberfläche am Plattenrand gegen den Horizont geneigt sind, und der Ausdruck für das Gewicht erhält folgende Gestalt

$$(3) \quad G = 2 r \pi \alpha \sin \vartheta + r^2 \pi y \sigma.$$

Das Maximum dieses Ausdrückes bei konstantem r wird bestimmt durch die Gleichung:

$$(4) \quad 0 = 2 \alpha \cos \vartheta + \sigma r \frac{\partial y}{\partial \vartheta}.$$

Für sehr kleine r ist nach (2)

$$y = r \left(\log \frac{2a\sqrt{2}}{r(1 + \cos \vartheta)} - c \right);$$

die Ableitung dieses Ausdrückes nach ϑ ist für das ganze Wertgebiet der ϑ von 0 bis π positiv, woraus sich ergibt, daß die in Betracht kommende Wurzel der Gleichung (4) etwas größer als $\pi/2$ ist. Ihre Abweichung von $\pi/2$ ist von der Ordnung r^2 ; für die kleinen Werte von r , für die Gleichung (2) überhaupt gilt, kann daher zur Berechnung des Abreißgewichtes ohne merklichen Fehler $\vartheta = \pi/2$ gesetzt werden, und G ist bis auf Größen, die in bezug auf r von der Ordnung $r^3 \log r \sin \vartheta$, gleich $2r\pi a$, sein Wert wird also wesentlich durch den ersten Summanden bestimmt.

Gerade umgekehrt verhält es sich für große r . Da y für diese und die in Betracht kommenden Werte von ϑ von endlicher Größe ist, so überwiegt hier der zweite Teil des Ausdrückes für G . Poisson vernachlässigt daher ohne weiteres in diesem Falle $2r\pi a \sin \vartheta$ gegenüber $r^3 \pi y \sigma$ und folgert dann weiter, daß das Maximum von G mit dem Maximum von y zusammenfällt. Durch dieses unkorrekte Verfahren werden zwar bezüglich des Wertes von G keine erheblichen Fehler verursacht, wohl aber hinsichtlich des zugehörigen Wertes von ϑ . Wir müssen auf diesen Punkt mit Rücksicht auf das Folgende genauer eingehen.

Die Differentialgleichung, welche in dem hier betrachteten Falle die Gestalt der freien Flüssigkeitsoberfläche bestimmt, lautet bekanntlich:

$$\frac{a^2}{2} \left(\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} + \frac{y'}{x(1+y'^2)^{1/2}} \right) = y,$$

in der y die vertikale Ordinate und x die Entfernung eines Flächenpunktes von der Rotationsachse bedeutet. Wird nun, was für die Versuchspraxis ja unerlässlich ist, das Gefäß, in dem die Flüssigkeit sich befindet, als so weit vorausgesetzt, daß ihre Oberfläche horizontale Teile enthält, so lautet die analytische Aufgabe, durch die y als Funktion von ϑ und r definiert wird, folgendermaßen: Es sei für $x = r$ $y' = -\operatorname{tg} \vartheta$; welchen Wert muß man y für $x = r$ beilegen, damit die Funktion, auf der Achse der reellen x auf Grund der vorstehenden

Differentialgleichung fortgesetzt, erst im Unendlichen verschwindet? Poisson gibt für diese Aufgabe, die er allerdings nicht gerade ebenso formuliert, folgende Lösung:

$$y^3 = 2 a^3 \sin^3 \frac{\vartheta}{2} - \frac{2 a^3 \sqrt{2}}{3 r} \left(1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2} \right) \left(1 - \frac{a \sqrt{2} \cos \frac{\vartheta}{2}}{2 r} \right),$$

wobei

$$\vartheta = i + \omega - \frac{\pi}{2}.$$

Poisson nimmt nun an, daß nach dieser Formel y von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \pi$ stetig wächst und erst bei $\vartheta = \pi$ sein Maximum erreicht, und daß daher, wenn man einen endlichen Benetzungs-winkel (in Poissons Bezeichnung $\pi - \omega$) annimmt, y den größten Wert, dessen es physikalisch fähig ist, bei $\vartheta = \omega$ erreicht; in dem speziellen Falle der vollständigen Benetzung also für $\vartheta = \pi$. In Wirklichkeit ergibt jedoch Poissons Formel, daß y schon bei einem Wert von ϑ den größten Wert hat, der kleiner als π ist, allerdings nur um Größen der zweiten Ordnung in bezug auf a/r von π abweicht, so daß also auch bei vollständiger Benetzung das Maximum von y schon vor $\vartheta = \pi$ fallen würde. Den Fall der Adhäsionsplatten für große r hat auch G. Kirchhoff¹⁾ behandelt, ohne jedoch auf die Bedingung des Abreißens einzugehen; für y entwickelt er eine Formel, die nur die erste Potenz von a/r berücksichtigt und soweit mit Poissons Ausdruck übereinstimmt; sie lautet

$$y = a \sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} - \frac{a^3}{3 r \sin \frac{\vartheta}{2}} \left(1 - \cos^3 \frac{\vartheta}{2} \right).$$

Kirchhoffs Formel hat, wie man sieht, für $\vartheta = \pi$ ein Maximum.

In meiner Dissertation²⁾ habe ich selbst die Entwicklung bis zur dritten Potenz von a/r geführt, gleichzeitig jedoch bewiesen, daß man es dabei nur mit dem Anfang einer divergenten Reihe zu tun hat, da es eine konvergente Potenzreihe für y nach Potenzen von a/r nicht gibt. Auch aus unserer Entwicklung folgt, daß y sein Maximum schon vor $\vartheta = \pi$

1) G. Kirchhoff, Mechanik, 2. Aufl. p. 160. 1877.

2) Th. Lohnstein, Inaug.-Diss. Berlin 1891. p. 17; Wied. Ann. 44. p. 56. 1891.

erreicht. Diese Tatsache läßt sich aber auch ohne spezielle Ausführung der Integration beweisen. Setzt man nämlich $y = f(x, \vartheta)$, so kann man zunächst — in Übereinstimmung mit dem Resultat der physikalischen Beobachtung — aus den angeführten annähernden Formeln so viel entnehmen, daß für das in Frage kommende Intervall der Variablen ϑ $\partial f / \partial x > 0$ ist. Nennt man nun ϱ den Krümmungshalbmesser der Meridiankurve der Flüssigkeitsoberfläche, so hat man der Differentialgleichung zufolge

$$\sin \vartheta = -\cos \vartheta \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \vartheta}.$$

Für $\vartheta = \pi/2$ ergibt sich hieraus:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \varrho, \quad \text{d. h. } > 0;$$

für $\vartheta = \pi$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = -\varrho \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{d. h. } < 0, \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial x} > 0.$$

Zwischen $\vartheta = \pi/2$ und $\vartheta = \pi$ muß somit $\partial f / \partial \vartheta$ mindestens einmal verschwinden, d. h. y erreicht schon vor $\vartheta = \pi$ ein Maximum. Daraus folgt nun weiter, daß auch G zwischen $\vartheta = \pi/2$ und $\vartheta = \pi$ ein Maximum hat. Denn da

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = 2r\pi\alpha \cos \vartheta + r^2\pi\sigma \frac{\partial y}{\partial \vartheta},$$

so ist für $\vartheta = \pi/2$

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = r^2\pi\sigma \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\frac{\pi}{2}}, \quad \text{d. h. } > 0,$$

für $\vartheta = \pi$ dagegen ist

$$\frac{\partial G}{\partial \vartheta} = -2r\pi\alpha + r^2\pi\sigma \left(\frac{\partial y}{\partial \vartheta} \right)_{\vartheta=\pi}, \quad \text{d. h. } < 0;$$

zwischen $\pi/2$ und π muß also $\partial G / \partial \vartheta$ mindestens einmal verschwinden. Da $2r\pi\alpha \cos \vartheta$ in diesem ganzen Intervall negativ ist, wird G bereits für einen kleineren Wert der Variablen das Maximum erreichen als y . Und zwar stehen die zugehörigen Argumentenwerte in dem Verhältnis zueinander, daß, während der zu y gehörige von π um eine Größe der Ordnung $(a/r)^2$ abweicht, der zu G gehörige um eine Größe der Ordnung a/r kleiner als π ist.

Diese ganzen Betrachtungen hätten lediglich theoretisches Interesse, wenn nicht in der erwähnten Arbeit Hr. W. Gallenkamp den Versuch gemacht hätte, die Adhäsionsplatten zu einer — allerdings nur indirekten — Bestimmung des Benetzungswinkels zu verwenden. In seinen theoretischen Anschauungen bewegt sich der Autor dabei ganz auf dem Boden Poissons. Er legt der Berechnung die durch die spezielle Annahme $\vartheta = \pi$ erhaltene Poisson'sche Formel für G zu grunde, und da er auf diese Weise für a^2 bei destilliertem Wasser einen Wert erhält, der mit den nach anderen Methoden erhaltenen Zahlen zuverlässiger Autoren befriedigend übereinstimmt, und da andererseits die physikalische Realisierbarkeit des Falles $\vartheta = \pi$ an die vollständige Benetzung der Adhäsionsplatte gebunden ist, so glaubte Hr. Gallenkamp, daß in seinen Versuchen der Benetzungswinkel den Wert Null gehabt hätte. Unsere obigen Darlegungen zeigen, daß diese Schlußweise unberechtigt war; denn selbst wenn der Benetzungswinkel zwischen der Flüssigkeit und der Substanz der Adhäsionsplatte gleich Null ist, muß das Abreißen der Platte schon bei dem Winkel $\vartheta_m = \pi - \varepsilon_m$ erfolgen, für den G zuerst ein Maximum erreicht und der nur von a und r abhängt. Daß aus der falschen Theorie dennoch ein brauchbarer Wert für a resultierte, folgt ungezwungen daraus, daß G selbst sich zwischen $\vartheta = \pi - \varepsilon_m$ und $\vartheta = \pi$, da es sich in der Nähe seines Maximums bewegt, nur um Größen ändert, die in bezug auf ε_m , also auch a/r , von der zweiten Ordnung sind.

Es ist nunmehr am Platze, das Auseinandersetzte im einzelnen rechnerisch zu belegen. Für y habe ich in meiner Dissertation¹⁾ folgende Entwicklung gegeben²⁾:

$$(5) \quad y = a \left(\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} + f_1 \frac{a}{r} + f_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + f_3 \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \dots \right),$$

in der die f_n lediglich von ϑ abhängen und durch die Rekursionsgleichung

$$\sum_{l+m=n} f_l \frac{d f_m}{d \vartheta} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d \vartheta} (\sin \vartheta f_{n-1}) - (n-2) \frac{1}{2} \cos \vartheta f_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

1) Th. Lohnstein, l. c.

2) Abgesehen von der hier etwas vereinfachten Schreibweise.

und die Bedingung, daß sämtliche f_n für $\vartheta = 0$ verschwinden, bestimmt sind. Die Entwicklung (5) ist zwar, wie erwähnt, divergent, ihre ersten Glieder geben jedoch eine gute Annäherung, wie sich mit den in meiner Dissertation angewandten Methoden darin läßt. Man erkennt so, daß der Fehler, den man begeht, wenn man die Reihe bei f_n abbricht, in bezug auf a/r von der $(x+1)^{\text{ten}}$ Ordnung ist. Ich habe die f_n bis einschließlich $x=3$ berechnet und gefunden:

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{3} \frac{1 - \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}, \quad f_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{f_1^3}{\sin \frac{\vartheta}{2}} - \frac{f_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\vartheta}{2}, \\ f_3 &= -\frac{f_1 f_2}{\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2}} - \frac{f_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{86 \sin \frac{\vartheta}{2}} \\ &\quad \left(1 - 2 \cos \frac{\vartheta}{2} + 4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} - \cos^3 \frac{\vartheta}{2} - 2 \cos^5 \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{4} \right). \end{aligned}$$

Um G als Funktion von r und ϑ darzustellen, hat man die Entwicklung (5) in den Ausdruck (3) einzusetzen. Es ist aber zweckmäßiger, anstatt G den Quotienten G/σ , das Volumen der gehobenen Flüssigkeitsmasse, einzuführen, weil dieses außer von r und ϑ nur von der einen Konstante a abhängt. Man erhält so:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{G}{\sigma} = V(a, r, \vartheta) = r \pi a^2 \sin \vartheta \\ \quad + r^2 \pi a \left(\sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2} + f_1 \frac{a}{r} + f_2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 + \dots \right). \end{cases}$$

In Gallenkamps Versuchen war a/r etwa gleich $1/17$. Berechnet man mit diesem Werte die Schwankungen, denen $V(a, r, \vartheta)$ unterliegt, wenn man ϑ von 160° bis 180° variiert, so findet man, daß der größte Wert von V in diesem Bezirk um noch nicht ganz $1/2$ Proz. größer ist als der kleinste; die Zahlen, die umgekehrt für die Kapillaritätskonstante aus einem derartigen Versuch resultieren, wobei also V als gegeben anzunehmen ist, fallen daher bei der entsprechenden großen Variation des Randwinkels um höchstens 1 Proz. voneinander verschieden aus, d. h. sie erreichen noch nicht einmal die bekannten experimentellen Schwankungen der Kapillaritäts-

konstante. Hr. Gallenkamp war somit nicht berechtigt, aus seinem Versuchsergebnis einen *bestimmten* Wert des Benetzungswinkels abzuleiten.

Sucht man mit Hilfe der Gleichung (6) denjenigen Wert von ϑ , $\vartheta_m = \pi - \varepsilon_m$, auf, für den V das Maximum erreicht, dessen Existenz oben allgemein nachgewiesen wurde, so ergibt sich bis auf Größen höherer Ordnung:

$$(7) \quad \varepsilon_m = 2\sqrt{2} \frac{a}{r} - \frac{1}{8} \left(\frac{a}{r} \right)^3;$$

und als Größe dieses Maximums selbst

$$(8) \quad \begin{cases} V_m(a, r, \vartheta_m) = r^3 \pi a \sqrt{2} \\ \left(1 - \frac{a}{3\sqrt{2}r} + \frac{35}{36} \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{83}{216\sqrt{2}} \left(\frac{a}{r} \right)^4 \right). \end{cases}$$

In den ersten beiden Gliedern stimmt, wie man sieht, der Ausdruck (8) mit Poissons Formel überein.

Wir wollen die Gleichungen (7) und (8) nunmehr zur Berechnung der Gallenkampschen Versuche anwenden. Mit einer Kupferplatte von 129,4 mm Durchmesser und destilliertem Wasser findet Gallenkamp bei der mittleren Temperatur von 19° ein mittleres Abreißgewicht von 70,38 g. Nach Anbringung der Korrekturen auf Luftverdrängung berechnet sich daraus nach (7) und (8):

$$a^3 = 14,706 \text{ mm}^3,$$

$$\varepsilon_m = 9^\circ 32,3',$$

also

$$\vartheta_m = 170^\circ 27,7'.$$

Die für a^3 erhaltene Zahl stimmt, wie man sieht, mit den nach anderen Methoden ermittelten Werten dieser Konstanten ebensogut überein, wie die von Hrn. Gallenkamp durch Benutzung von Poissons Formel berechnete Zahl, aber der zugehörige Randwinkel ϑ weicht fast um 10° von jenem ab, für den Hrn. Gallenkamp seine Versuche zu sprechen schienen.

Ist man denn aber überhaupt berechtigt, so wie wir es eben getan, ohne weiteres aus einem Versuche mit der Adhäsionsplatte auf Grund der Gleichung (8) einen Wert für die Kapillarkonstante abzuleiten? Kann man ferner aus einem solchen Versuch einen Schluß auf den Benetzungswinkel ziehen?

Diese beiden Fragen bedürfen noch einer kurzen Erörterung. Man sieht in der Tat leicht ein, daß uns nach (8) der Adhäsionsplattenversuch zunächst nur eine *untere Grenze* für a liefert. Bezeichnet man nämlich mit V_0 das als Ergebnis des Versuches gefundene Volumen der gehobenen Flüssigkeit, so darf man nach der Definition von $V_m(a, r, \vartheta_m)$ nur ansetzen:

$$(9) \quad V_0 \leq V_m(a, r, \vartheta_m);$$

ist nun a_0 die in Betracht kommende positive reelle Wurzel der Gleichung $V_0 = V_m$, so folgt aus (9) $a \geq a_0$.

Um jetzt zu entscheiden, ob eventuell in dieser Ungleichheit das untere Zeichen gilt, hat man nach (7) aus $a_0 \varepsilon_m$ zu berechnen. Weiß man über den Benetzungswinkel zwischen der Flüssigkeit und der Plattensubstanz nichts oder nur, daß er $> \varepsilon_m$ ist, so bringt diese Berechnung keine Aufklärung. Weiß man aber aus anderweitigen Beobachtungen, daß der Benetzungswinkel $< \varepsilon_m$ ist, so gilt offenbar in $a \geq a_0$ das Gleichheitszeichen, und die Methode der Adhäsionsplatte führt daher zu einer *wirklichen Bestimmung von a*. Kennt man ferner zwar nicht den Benetzungswinkel, aber einen annähernden Wert, speziell eine obere Grenze α für die Kapillaritätskonstante, so kann man aus dem Plattenversuch neben der unteren Grenze für a^2 eine *obere Grenze für den Benetzungswinkel* ableiten. Setzt man nämlich in (6) für a α , wobei natürlich vorausgesetzt ist, daß α größer ist als a_0 , löst die so entstehende Gleichung nach ϑ auf und nennt die zwischen $\pi/2$ und π liegende Wurzel $\bar{\vartheta}$, so ist offenbar $\pi - \bar{\vartheta}$ eine obere Grenze für den Benetzungswinkel. Wenden wir die letzten Überlegungen auf Gallenkamps Versuche an, wobei α entsprechend den besseren Beobachtungen gleich 3,9 mm genommen werde, so können wir schließen:

1. $a^2 > 14,706$;
2. Benetzungswinkel zwischen Kupfer und Wasser $< 30^\circ$, da man $\bar{\vartheta}$ nahezu gleich 150° findet.

Tatsächlich dürfte, wie sich aus unserer Berechnung der an Metallplatten angestellten Tropfversuche Lord Rayleighs¹⁾

1) Lord Rayleigh, Philosophical Magazine 48. p. 321. 1899.

ergibt, der Benetzungswinkel von Kupfer und Wasser zwischen 6° und 11° liegen, so daß, da $s_m = 9^\circ 32,3'$ ebenfalls diesem Intervall angehört, im vorliegenden Falle der zunächst nur als untere Grenze von a^2 berechnete Wert als wirkliches Experimentalergebnis für diese Größe aufgefaßt werden kann.

Wir glauben damit in erschöpfender Weise die Unhaltbarkeit der Gallenkampschen Betrachtungsweise dargetan zu haben. Hr. Gallenkamp durfte aus seinen Versuchen nicht schließen, daß der Benetzungswinkel zwischen Kupfer und Wasser gleich Null ist, weil sich ein verschwindender Benetzungswinkel, selbst wenn er vorhanden ist, durch Abhäsionsplattenversuche niemals zur Darstellung bringen läßt, und noch weniger durfte er in kühner Verallgemeinerung aus seinen Versuchen folgern, daß „der Randwinkel einer netzenden Flüssigkeit gleich Null zu setzen ist“ (l. c. p. 492).¹⁾

Zur Bestimmung von Benetzungswinkeln braucht man um so weniger auf den Adhäsionsplattenversuch zurückzugreifen, als in den Versuchen an Tropfplatten eine jedenfalls viel bequemere und, wie ich glaube, auch einwandfreie Methode zur Ermittlung dieser Konstanten steckt. Aus der in unserem Aufsatz „Zur Theorie des Abtropfens. Zweiter Nachtrag“ gegebenen Formel²⁾ folgt, daß schon kleine Werte des Benetzungswinkels auf das Gewicht des von einer ebenen Platte abfallenden Tropfens einen erheblichen Einfluß ausüben, so daß die der Wirklichkeit entsprechenden Tropfen gegenüber dem

1) Hr. G. Quincke hat in seiner Polemik gegen Gallenkamps Folgerung bezüglich des Benetzungswinkels (Ann. d. Phys. 10. p. 458. 1903) den Kern der Sache nicht richtig getroffen, indem er bemerkt, daß das Abreißgewicht vom Benetzungswinkel unabhängig ist, was nach dem Obigen nur der Fall ist, wenn dieser Winkel $< s_m$ ist, wobei Hr. Quincke seine Behauptung irrigerweise auf die für den vorliegenden Fall gar nicht zuständige durch die Annahme $\vartheta = \pi/2$ gewonnene Formel für G stützt. Auch der von Hrn. Quincke erhobene weitere Einwand, Hr. Gallenkamp hätte auch die höheren Potenzen von a/r berücksichtigen müssen, ist praktisch unerheblich, da aus den im Text erwähnten Entwicklung meiner Dissertation folgt, daß bei der Breite der von Gallenkamp benutzten Adhäsionsplatten die Berücksichtigung der höheren Potenzen von a/r keine wesentlichen Änderungen der aus den Versuchen berechneten Zahlen herbeigeführt hätte.

2) Th. Lohnstein, Ann. d. Phys. 21. p. 1037. 1908.

zum verschwindenden Benetzungswinkel gehörigen „Maximaltropfen“ bedeutend verkleinert erscheinen. Kombiniert man nun einen solchen Tropfplattenversuch mit einer Bestimmung der Kapillaritätskonstante a^2 nach einer der bekannten Methoden, z. B. mit einem Versuch an einer Tropfröhre der üblichen Dimensionen, so kann man aus je einem solchen Versuchspaar sowohl a^2 als auch den Benetzungswinkel zwischen der Flüssigkeit und der Substanz der Tropfplatte mit ausreichender Genauigkeit ermitteln. Nach den wenigen bisher vorliegenden Versuchen dieser Art von Guthrie¹⁾ und Lord Rayleigh weist *destilliertes Wasser* sowohl gegen Glas als auch Metalle einen endlichen Benetzungswinkel auf.

Berlin, Februar 1908.

1) A. Guthrie, Proc. of Roy. Soc. of London 13. p. 444. 1865.

(Eingegangen 26. Februar 1908.)

11. Eine Bemerkung

*zu der Arbeit von Hrn. F. A. Schulze:
„Einige neue Methoden zur Bestimmung der
Schwingungszahlen höchster hörbarer
und unhörbarer Töne usw.“¹⁾;
von P. Debye.*

In der kürzlich erschienenen, oben zitierten Arbeit, teilt Hr. F. A. Schulze u. a. einige Beobachtungen mit über eigenartige Klangfiguren bei eingeklemmten kreisrunden Papierscheibchen und verweist auf die ganz analogen von A. Elsas.²⁾ Er spricht die Meinung aus, daß die Berechnung dieser Figuren große Schwierigkeiten bieten würde. Wir möchten nun im folgenden kurz zeigen, wie die Berechnung der *erzwungenen* Schwingungen einer solchen Platte dazu führt, die betreffenden Figuren durch Übereinanderlagerung *freier* Schwingungen entstanden zu denken. In dieser Weise erhält man qualitativ die beobachteten Knotenkurven; eine quantitative Erklärung würde erst möglich sein, wenn über die Art der Anregung ganz bestimmte Angaben vorliegen.

Die Differentialgleichung für die zur Ebene der Platte senkrechte Entfernung von der Gleichgewichtslage lautet³⁾ in den Bezeichnungen von Hrn. Schulze bei Anwesenheit äußerer Normalkräfte $N = N_0 e^{iqt}$:

$$(1) \quad \Delta \Delta w + 12 \frac{\rho(1-\mu^2)}{ED^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 12 \frac{1-\mu^2}{ED^2} N_0 e^{iqt}.$$

Für die Berechnung der Eigenschwingungen ist $N_0 = 0$ zu setzen. Die in doppelt unendlicher Anzahl vorhandenen

1) F. A. Schulze, Ann. d. Phys. 24. p. 785. 1907.

2) A. Elsas, Wied. Ann. 19. p. 474. 1883.

3) Vgl. A. E. H. Love, Lehrbuch der Elastizität, Deutsch von Timpe, p. 560 u. 564.

Lösungen¹⁾ sind im vorliegenden Fall dargestellt durch die Formel:²⁾

$$(2) \quad w = W_{n\nu} e^{ip_{n\nu} t} = \left\{ J_n(i\xi) J_n\left(\xi \frac{r}{R}\right) - J_n(\xi) J_n'\left(i\xi \frac{r}{R}\right) \right\} \cos n\vartheta e^{ip_{n\nu} t},$$

wobei $\xi = \xi_{n\nu}$ irgend eine Wurzel der Gleichung (n ganzzahlig):

$$(3) \quad iJ_n(\xi) J_n'(\xi) - J_n'(\xi) J_n(i\xi) = 0.$$

Die Größen $\xi_{n\nu}$ und $p_{n\nu}$ hängen zusammen mittels der Formel:

$$(4) \quad p_{n\nu} = \xi_{n\nu}^2 \frac{D}{R^2} \sqrt{\frac{1}{12(1-\mu^2)} \frac{E}{\rho}}.$$

Es liegt nun nahe für den Fall, daß N_0 von Null verschieden ist, die Lösung der Gleichung (1) als eine nach den „Eigenfunktionen“ $W_{n\nu}$ fortschreitende Reihe anzusetzen. Entwickelt man in dieser Absicht zunächst die Funktion N_0 in der Form:

$$(5) \quad N_0 = \sum c_{n\nu} W_{n\nu},$$

wobei die Summation über alle Werte von n und ν zu erstrecken ist, so erhält man für die Koeffizienten $c_{n\nu}$ auf Grund der für die Eigenfunktionen geltenden Orthogonalitätsbedingung³⁾:

$$(6) \quad c_{n\nu} = \frac{\int N_0 W_{n\nu} d\sigma}{\int W_{n\nu}^2 d\sigma},$$

wobei die Integration über die ganze Platte zu erstrecken ist. Das Integral im Nenner kann nach dem Greenschen Satz durch einen Grenzübergang ohne weiteres ausgeführt werden und liefert

1) F. A. Schulze, l. c. Die dortige Gleichung (1) soll offenbar lauten:

$$w_n = P \cos n\vartheta \left\{ J_n\left(\xi \frac{r}{R}\right) + \lambda J_n'\left(i\xi \frac{r}{R}\right) \right\} \cos(pt - s).$$

Das Resultat findet sich bei Lord Rayleigh, Theory of Sound, London 1. p. 366. 1894, wo aber nur die zwei ersten Wurzeln von (3) für den Fall $n = 0$ angegeben werden.

2) Statt $\cos n\vartheta$ kann natürlich in (2) auch $\sin n\vartheta$ gesetzt werden. Der Übersichtlichkeit halber wurde dieses im folgenden fortgelassen, obwohl bei ganz beliebiger Wahl von N_0 auch die Lösungen mit $\sin n\vartheta$ in Betracht zu ziehen wären.

3) Vgl. Lord Rayleigh, l. c. 1. p. 358.

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int W_{n\nu}^2 d\sigma = \frac{\pi R^2}{4} \frac{R^3}{\pi^3} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} P \right) \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial x} \right. \\ \left. - \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} P \right) \right], \\ r=R \end{array} \right.$$

unter P die geschweifte Klammer in (2) verstanden.

Setzt man nun auch für w eine Reihe nach Eigenfunktionen, aber mit unbestimmten Koeffizienten, so erhält man aus (1) als vollständige Lösung des Problems für den Fall, daß äußere Kräfte $N_0 e^{iqt}$ die Bewegung erzwingen:

$$(8) \quad w = 12(1 - \mu^2) \frac{R^4}{ED^3} e^{iqt} \sum_{n\nu} \frac{e_{n\nu}}{x_{n\nu}^4 \left(1 - \frac{q^2}{p_{n\nu}^2} \right)} W_{n\nu}.$$

Abgesehen von ganz speziellen Fällen der Anregung ersieht man aus (8), daß die Bewegung der Platte sich immer zusammensetzt aus allen möglichen Eigenschwingungen. Kommt die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft in die Nähe einer Eigenschwingungszahl ($q \cong p_{n\nu}$), so überwiegt in bekannter Weise das betreffende Glied der Reihe und würde nach (8), wenn die Schwingungszahlen genau übereinstimmen, sogar unendlich groß werden. In letzterer Aussage steckt aber eine unberechtigte Extrapolation, da für große Ausbiegungen Gleichung (1) nur annähernde Gültigkeit beansprucht.

Im allgemeinen wird man eine gute Annäherung für w erhalten, indem man nur einige Glieder der Reihe (8) berücksichtigt. In der Tat wollen wir zeigen, daß sich sämtliche von Hrn. Schulze erhaltenen Figuren (p. 795) durch Übereinanderlagerung nur zweier Eigenschwingungen erhalten lassen. Zu diesem Zweck wurde in Fig. 1 zunächst die theoretische Form der ausgebogenen Platte gezeichnet längs des Halbstrahles $\vartheta = 0$ für den Fall, daß diese nur eine Eigenschwingung ausführt und zwar stellt Kurve I W_{00} (0 Knotendurchmesser, 0 Knotenkreise), Kurve II W_{20} (2 Knotendurchmesser, 0 Knotenkreise) und Kurve III W_{01} (0 Knotendurchmesser, 1 Knotenkreis)

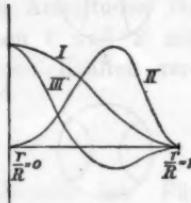


Fig. 1.

dar.¹⁾ Von der unsymmetrischen Eigenschwingung W_{10} wurde abgesehen, obwohl die zugehörige Schwingungszahl in den untersuchten Bereich fällt, sie scheint sich in dem Fall von Hrn. Schulze nicht bemerkbar zu machen. Gehen wir nun aus von einer Schwingungszahl, die nahezu der zu W_{01} gehörigen gleich

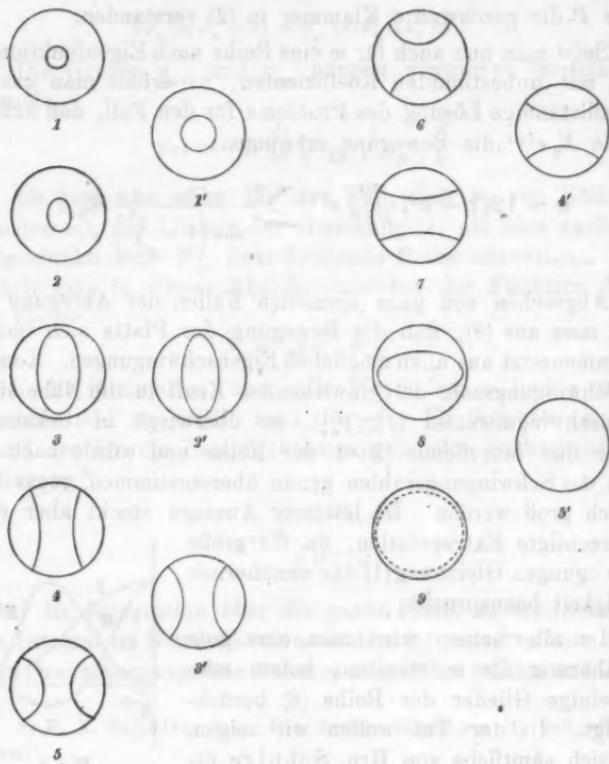


Fig. 2.

ist, so wird nach (8) das entsprechende Glied der Reihe stark überwiegen, die Knotenkurve ist also, wie Kurve III Fig. 1 zeigt, nahezu ein Kreis (Fig. 2, Nr. 1). Nimmt jetzt die Schwingungszahl der einwirkenden Kraft allmählich ab, so wird der zu W_{10}

1) Die an sich willkürlichen Maximalamplituden sind durch Multiplikation mit geeigneten Konstanten auf den gleichen Wert gebracht.

gehörige Nenner der Reihe (8) fortwährend größer werden, die anderen Glieder der Reihe bekommen also Gelegenheit einen Einfluß auszuüben; insbesondere wird sich das Glied W_{20} (Kurve II, Fig. 1) bemerkbar machen, das wir deshalb allein berücksichtigen wollen. So entstand Fig. 2 Nr. 2', indem wir zu W_{01} noch die Eigenschwingung W_{20} mit einer fünfmal kleineren Maximalamplitude hinzufügten, Fig. 2, Nr. 3' entspricht dem Fall, daß die beiden Maximalamplituden gleich groß sind. Inzwischen ist die Schwingungszahl der erregenden Kraft in die Nähe der zu W_{20} gehörigen Eigenschwingungszahl gekommen; infolgedessen geht $(q/p_{20})^3$ bei weiterem Sinken dieser Frequenz von einem Werte > 1 zu einem Werte < 1 über, so daß der zu W_{20} gehörige Faktor der Reihe (8) sein Zeichen wechselt. Diesem Umstände entspricht das scheinbare Umklappen der Knotenfigur (Fig. 2, Nr. 4'). Sinkt nun q noch weiter, so tritt die Grundschwingung W_{00} (Kurve I, Fig. 1) allmählich in den Vordergrund und erzeugt schließlich eine Schwingung ohne Knotenkurven (Fig. 2, Nr. 5'). Neben diesen theoretischen Figg. 1' . . . 5' wurden in Fig. 2 die experimentell gefundenen nochmals abgedruckt, die, wie man sieht, in allen Stücken mit ersteren übereinstimmen. Daß sich der stetige Übergang der Klangfiguren ineinander nur bei Papier zeigte, hat offenbar seinen Grund in dem sehr kleinen Elastizitätsmodul. Formel (8) zeigt ja, daß, wenn man die zu einem bestimmten Gliede gehörigen Amplituden für zwei Plättchen aus verschiedenen Substanzen 1 und 2 mit gleichen Dimensionen bei gleichen anregenden Kräften vergleicht, diese sich verhalten wie

$$\frac{1 - \mu_1^3}{1 - \mu_2^3} \cdot \frac{E_2}{E_1},$$

wenn der Quotient q/p in beiden Fällen derselbe ist. Für Papier und Glas wird dieses Verhältnis ungefähr 30.

Wenn die Plättchen sehr dünn sind, müssen sich nach (8), wegen des Faktors D^3 im Nenner, ähnliche Erscheinungen zeigen, wie bei Papier. Die Beobachtungen bei Glimmerplättchen, wo auch Abweichungen von den regelmäßigen Klangfiguren auftraten, könnten wohl in dieser Weise erklärt werden.

München, Math.-phys. Sammlung, 20. Januar 1908.

(Eingegangen 23. Januar 1908.)

die beiden vorliegenden Gleichungen auf richtige und neue Bedeutung zu bringen und nachstehend die

**12. Berichtigung zur Arbeit:
„Über den Einfluß von Unstetigkeiten bei der
Bewegung von Elektronen“;**
von G. A. Schott.

In die letzte Gleichung (31) (Ann. d. Phys. 25. p. 79. 1908) und die entsprechende Gleichung (36) (p. 88), hat sich ein Fehler eingeschlichen. Obgleich derselbe auf den Gang der Untersuchung, und auch auf die behandelten Beispiele ohne jeden Einfluß ist, so möge er hier, um Mißverständnissen vorzubeugen, korrigiert werden. Die angegebenen Gleichungen müssen heißen:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathfrak{A} = \int \left[\frac{\mathfrak{v}}{c^2} \cdot \mathbf{R}' \right] \frac{d \mathbf{e}'}{K'^2 R'^3} \\ \quad + \int \left[\frac{\mathfrak{v}'}{c} \cdot \mathbf{R}' \right] \left\{ 1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\mathfrak{v}'}{c^2} \cdot \mathbf{R}' \right) \right\} \frac{d \mathbf{e}'}{K'^2 R'^3} \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G} = \pm \int \left\{ \frac{\mathfrak{v}'}{c^2} - \frac{1}{R'} \left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \left[\frac{\mathfrak{v}'}{c^2} \cdot \mathbf{R}' \right] \right] \right\} \frac{d \mathbf{e}'}{K'^2 R'} \\ \mp \int \left\{ \frac{\mathbf{R}'}{R'} - \frac{\mathfrak{v}'}{c} + \frac{1}{R'} \left[\frac{\mathfrak{v}}{c} \left[\frac{\mathfrak{v}'}{c} \cdot \mathbf{R}' \right] \right] \right\} \\ \quad \left\{ 1 - \frac{v'^2}{c^2} + \left(\frac{\mathfrak{v}'}{c^2} \cdot \mathbf{R}' \right) \right\} \frac{d \mathbf{e}'}{K'^2 R'^3} \end{array} \right.$$

Bonn, den 4. März 1908.

(Eingegangen 6. März 1908).

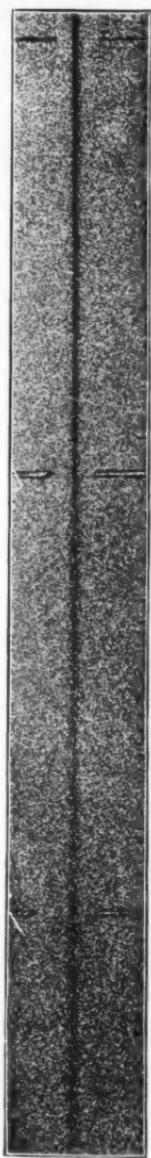


Fig. 1.



Fig. 2.

B. Walter und R. Pohl.

